

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

AMANDA JAREK

APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO NA ANÁLISE DE
ESTABILIDADE DE TÚNEIS EM MEIOS DESCONTÍNUOS - ABORDAGEM
PROBABILÍSTICA

CURITIBA

2016

AMANDA JAREK

APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO NA ANÁLISE DE
ESTABILIDADE DE TÚNEIS EM MEIOS DESCONTÍNUOS - ABORDAGEM
PROBABILÍSTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Métodos Numéricos em Engenharia da Universidade Federal do Paraná como parte dos requisitos parciais para obtenção do título de Doutor, Setor de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Alkimin de Lacerda

Coorientador: Prof. Dr. André Pacheco de Assis

CURITIBA

2016

J37a

Jarek, Amanda

Aplicação do método dos elementos de contorno na análise de estabilidade de túneis em meios descontínuos – abordagem probabilística / Amanda Jarek. – Curitiba, 2016..

151 f. : il. [algumas color.] ; 30 cm.

Tese (doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, 2016.

Orientador: Luiz Alkimin de Lacerda -- Coorientador: André Pacheco de Assis.

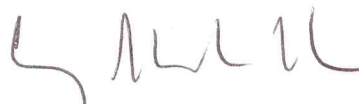
1. Métodos de elementos de contorno. 2. Mecânica das Rochas. 3. Anisotropia. I. Universidade Federal do Paraná. II. Lacerda, Luiz Alkimin de. III. Assis, André Pacheco de. IV. Título.

CDD: 518.6

TERMO DE APROVAÇÃO

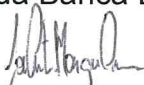
Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Tese de Doutorado de **AMANDA JAREK**, intitulada: "*Aplicação do Método dos Elementos de Contorno na Análise de Estabilidade de Túneis em Meios Descontínuos - Abordagem Probabilística*", após terem inquirido a aluna e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO.

Curitiba, 13 de Maio de 2016.



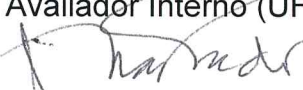
Prof LUIZ ALKIMIN DE LACERDA

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)



Prof JOSÉ ANTONIO MARQUES CARRER

Avaliador Interno (UFPR)



Prof ROBERTO DALLEDONE MACHADO

Avaliador Interno (UFPR)



Prof RODRIGO PELUCI DE FIGUEIREDO

Avaliador Externo (UFOP)



Prof MARIA FERNANDA FIGUEIREDO DE OLIVEIRA

Avaliadora Externa (UERJ)

Dedico esta tese aos meus pais, Nilton e Adenancir, com muito amor.

AGRADECIMENTOS

À Deus, que me concedeu muita luz, paz de espírito, saúde, energia e serenidade nas horas mais difíceis para realizar este trabalho.

Aos meus pais, Nilton Jarek e Adenancir Aparecida Escorsin Jarek, pelo amor, incentivo, compreensão e por terem me ensinado a ser uma pessoa humilde e a lutar pelos meus objetivos por mais difíceis que fossem os obstáculos a serem percorridos. À minha irmã, Camila Jarek, pelo amor, apoio e por me apresentar o CrossFit que era o local onde eu descarregava meu estresse para continuar lutando pelos meus objetivos.

Ao meu namorado, Alexandre Felipe Coelho de Oliveira, pelo amor, divertimentos, incentivo, paciência, por me auxiliar na preparação das apresentações, me questionar e por nunca ter deixado eu desistir dos meus sonhos.

Ao meu orientador, Professor Dr. Luiz Alkimin de Lacerda, primeiramente por ter aceitado o convite de me orientar passados dois anos e meio do início do meu doutorado. Além disso, sou eternamente grata pela dedicação, ensinamentos, incentivo, paciência e por me ajudar a entender que nem sempre as coisas saem como a gente gostaria, mas que, com dedicação e esforço, nós podemos alcançar os objetivos esperados.

Ao meu coorientador, Professor Dr. André Pacheco de Assis, primeiramente por ter dado seu voto de confiança para me coorientar, mesmo não me conhecendo direito. Pelos ensinamentos em mecânica de rochas, pelo apoio e por dedicar parte do seu tempo com o meu trabalho.

Ao meu amigo, Elvidio Gavassoni, que, mesmo sem entender de elementos de contorno e rochas, sempre esteve à disposição para me ajudar e incentivar a não desistir do doutorado.

Aos meus amigos e professores do Rio de Janeiro que, mesmo de longe, transmitiram pensamentos positivos para que este trabalho fosse concluído.

Aos meus colegas e amigos dos Institutos Lactec, pela compreensão, incentivo e suporte para realização deste trabalho. Em especial, à Isabella Françoso Rebutini Figueira, pelo apoio, incentivo, discussões sobre geologia, ajuda na elaboração de algumas imagens e por ter dado o voto de confiança para elaborar uma tese no projeto sob sua coordenação. À minha amiga, Betina Lepretti Medeiros, por me apoiar, ajudar, ouvir minhas reclamações e me animar nos momentos mais difíceis. À minha amiga, Mariana Bragança, pelo incentivo, apoio e ajuda nesta reta final do trabalho.

À todos meus colegas e amigos do Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos - PPGMNE, pelo apoio e ajuda: Fábio Balbo, Emilio Mercuri, Liliane Marconcini, Raphael Scuciato e Roberto Pettres. Em especial ao meu amigo, Eduardo Furuzato, por me apoiar,

incentivar e ajudar sempre que surgiam problemas no meu algoritmo.

À Cemig, pelo apoio financeiro para realização desta pesquisa. Em especial, à Laurenn Wolochate Aracema de Castro, gerente do projeto o qual esta tese foi desenvolvida.

À todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos, pelos conhecimentos transmitidos durante o curso de doutorado.

Ao Emílio Kavamura, por disponibilizar o template em latex para escrever esta tese nos formatos da UFPR.

À secretaria do CESEC - Centro de Estudos de Engenharia Civil, que durante o tempo de permanência neste curso me auxiliaram em tudo que eu precisei. Em especial, ao Jair dos Anjos da Silva, Maristela Bandil e Dona Sueli.

Aos membros da banca, Prof. Dra. Maria Fernanda Figueiredo de Oliveira, Prof. Dr. Rodrigo Peluci de Figueiredo, Prof. Dr. José Antonio Marques Carrer e Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado, pelas contribuições de melhoria do trabalho.

"Eu tentei 99 vezes e falhei, mas na centésima tentativa eu consegui. Nunca desista de seus objetivos mesmo que esses pareçam impossíveis, a próxima tentativa pode ser vitoriosa."

Albert Einstein

RESUMO

Avaliar a estabilidade de um túnel escavado em rocha é algo que demanda um vasto conhecimento, haja vista as incertezas inerentes às propriedades mecânicas e geométricas do maciço. Um dos parâmetros fundamentais para este tipo de análise são as tensões *in-situ*, pois, durante a escavação, alterações no campo de deformações do maciço são geradas e novas tensões surgem, podendo impactar diretamente na estabilidade da escavação. Além disso, outro fator importante no estudo de escavação em rocha é o conjunto de descontinuidades, pois são elas que conduzem a deformabilidade, a resistência e a permeabilidade de um maciço. Ademais, podem induzir anisotropia no plano de ruptura do maciço rochoso. Para isso, é importante adotar um critério de ruptura adequado visando a segurança do empreendimento. Diante desse contexto, o presente trabalho visa apresentar a formulação de elementos de contorno para meios isotrópicos e anisotrópicos para avaliar o estado de tensões e deformações de um maciço rochoso. A adoção por este método deu-se pela vantagem de poder aplicá-lo em domínios infinitos. Para avaliação da estabilidade, adotou-se o critério de Hoek-Brown onde o parâmetro que representa a perturbação devido ao fogo é introduzido por uma variação linear na qual limita a distância máxima para ocorrência de ruptura num maciço rochoso. Devido às incertezas dos parâmetros de entrada para compor a modelagem de um maciço, um modelo probabilístico utilizando o Método de Monte Carlo é incorporado ao código implementado. Para incluir os efeitos da presença de uma descontinuidade num maciço, formulações da mecânica do contato, com aderência e separação, são introduzidas por meio da inserção de sub-regiões. Para isso, um processo iterativo incluindo passos de carga foi introduzido com o intuito de observar a evolução da área de ruptura numa escavação submetida a um estado de tensões iniciais. A validação do código deu-se por meio de soluções analíticas para problemas conhecidos. Ao comparar os resultados obtidos para os casos isotrópicos e anisotrópicos, conclui-se que nem sempre a modelagem em meio isotrópico é uma alternativa conservadora na análise na estabilidade de um túnel. Com relação à modelagem de múltiplas sub-regiões, em meio anisotrópico, os resultados para o caso de interfaces completamente aderidas foram convincentes. Para os casos com possibilidade de abertura de uma descontinuidade cuja validação deu-se por meio de um modelo de mecânica da fratura, os resultados obtidos foram satisfatórios e limitados pelos recursos computacionais disponíveis. Em suma, o código implementado mostrou um grande potencial para análise de estabilidade de túneis escavados em rocha.

Palavras-chave: Mecânica das Rochas. Método dos Elementos de Contorno. Anisotropia. Tensões Iniciais. Descontinuidades.

ABSTRACT

To evaluate the stability of a tunnel excavated in rock is something that requires a great knowledge considering the uncertainties inherent to the mechanical and geometrical properties of the rock mass. One of the fundamental parameters for this type of analysis are the in situ stresses, since, during the excavation, changes in the strain field of rock mass are generated and new stresses arise, which can directly impact on the stability of the excavation. Furthermore, another important factor in the study of rock excavation is the group of discontinuities, who lead the deformability, strength and permeability of a rock mass. Moreover, they can induce anisotropy in the rock mass failure plan. Thus, it is important to adopt an appropriate failure criterion aiming at the security of the excavation. In this context, this work presents a formulation of the boundary element method for isotropic and anisotropic media to assess the state of strains and stresses within a rock mass. The adoption of this method was due to its modeling advantages when applied to infinite domains. To evaluate the stability, the Hoek-Brown criterion was adopted where the parameter representing the mass disturbance due to fire is introduced by a linear function with a fixed range limiting the maximum distance for occurring rupture of the rock mass. Due the uncertainties of input parameters, for modeling of the rock mass, a probabilistic model using the Monte Carlo method is incorporated into the implemented code. To include the effects of the presence of discontinuities in rock mass, mechanical contact formulations with stick and separation conditions are introduced by insertion of subregions. For this, an iterative process including load steps was introduced in order to observe the evolution of the rupture area in an excavation under an initial state of stress. The code was validated by analytical solutions of known problems. By comparing the results obtained for the isotropic and anisotropic cases, it is concluded that modeling with isotropic medium condition is not always a conservative alternative in the stability analysis of a tunnel. With respect to modeling with multiple subregions in an anisotropic medium, the results for the case of completely bonded interfaces were convincing. For cases with the possibility of opening discontinuities, validated by means of a fracture mechanics simple model, results were satisfactory and limited by the available computational resources. In summary, the implemented code showed great potential for stability analysis of tunnel excavations in rock.

Keywords: Rock Mechanics. Boundary Element Method. Anisotropy. Initial Stress. Discontinuities.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – VISTA INTERNA DO TÚNEL DE SÃO GOTARDO.	24
FIGURA 2 – REGIÃO COM DOMÍNIO Ω^* E CONTORNO Γ^* INFINITOS CONTENDO UM DOMÍNIO Ω E CONTORNO Γ FINITOS.	39
FIGURA 3 – PONTO FONTE x' SITUADO NO CONTORNO CIRCUNDADO POR UM ARCO SEMI-CIRCULAR.	43
FIGURA 4 – ESQUEMA DO DOMÍNIO INFINITO COM UMA CAVIDADE E VETOR NORMAL.	45
FIGURA 5 – MODELO COM DISCRETIZAÇÃO UTILIZANDO A FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO CONSTANTE.	46
FIGURA 6 – ELEMENTO COM FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO LINEAR.	47
FIGURA 7 – MODELO DISCRETIZADO COM FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO LINEARES.	47
FIGURA 8 – REPRESENTAÇÃO FÍSICA DAS TENSÕES INICIAIS EM UM DOMÍNIO COM CAVIDADE SUBSTITUÍDO PELA COMBINAÇÃO DE DOIS ESTUDOS COMPLEMENTARES.	48
FIGURA 9 – CRITÉRIO DE RUPTURA DE MOHR-COULOMB.	50
FIGURA 10 – COMPARAÇÃO ENTRE AS ENVOLTÓRIAS LINEAR DE MOHR-COULOMB E NÃO-LINEAR DE HOEK-BROWN. (ADAPTADO DE (EBERHARDT, 2012))	51
FIGURA 11 – RELAÇÃO ENTRE O CRITÉRIO DE HOEK-BROWN DA ROCHA INTACTA E A RESISTÊNCIA DO MACIÇO ROCHOSO AJUSTADO. (ADAPTADO DE (EBERHARDT, 2012))	52
FIGURA 12 – CONDIÇÕES EM QUE O CRITÉRIO DE HOEK-BROWN PODE SER APLICADO. (ADAPTADO DE (HOEK; KAISER; BAWDEN, 1995))	53
FIGURA 13 – GRÁFICO DA VARIAÇÃO DO DANO EM RELAÇÃO À DISTÂNCIA MÁXIMA DA REGIÃO PERTURBADA.	54
FIGURA 14 – CAVIDADE CIRCULAR EM MEIO INFINITO SUBMETIDA A UM ESTADO DE TENSÕES INICIAIS.	54
FIGURA 15 – GRÁFICO DAS TENSÕES RADIAIS – ERRO (%) x DISTÂNCIA (M).	55
FIGURA 16 – GRÁFICO DAS TENSÕES TANGENCIAIS – ERRO (%) x DISTÂNCIA (M).	56
FIGURA 17 – ORIENTAÇÃO DE CADA SEGMENTO DE LINHA $\Delta\Gamma_m$ A SER INTEGRADO. (FONTE: ADAPTADO DE (CRUSE; SWEDLOW, 1971).)	62
FIGURA 18 – EXEMPLO DE UMA CAVIDADE EM MEIO INFINITO COM RAIO DE 1M.	64

FIGURA 19 – EXEMPLO DE UMA CAVIDADE EM MEIO INFINITO COM RAIOS DE 1M.	66
FIGURA 20 – MODELO TEÓRICO COM AS TENSÕES PRINCIPAIS ROTACIONADAS À 14 GRAUS.	71
FIGURA 21 – MALHA DE PONTOS INTERNOS ADOTADA PARA APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS DE DOMÍNIO E VERIFICAÇÃO DA ESTABILIDADE.	73
FIGURA 22 – HISTOGRAMA DOS PARÂMETROS EMPREGADOS EM 1000 ANÁLISES.	73
FIGURA 23 – REGIÃO DE RUPTURA PARA A 1ª SITUAÇÃO.	74
FIGURA 24 – TENSÕES PRINCIPAIS σ_1 (MPa) PARA A 1ª SITUAÇÃO.	74
FIGURA 25 – TENSÕES PRINCIPAIS σ_3 (MPa) PARA A 1ª SITUAÇÃO.	75
FIGURA 26 – REGIÃO DE RUPTURA PARA A 2ª SITUAÇÃO.	75
FIGURA 27 – SUPERPOSIÇÃO DAS REGIÕES DE FALHA DAS SITUAÇÕES 1 E 2.	76
FIGURA 28 – REGIÕES DE RUPTURA OBTIDAS PARA A 3ª SITUAÇÃO.	77
FIGURA 29 – REGIÕES DE RUPTURA OBTIDAS PARA 4ª SITUAÇÃO.	78
FIGURA 30 – GRÁFICOS DAS TENSÕES PRINCIPAIS $\sigma_3 \times \sigma_1$ PARA 1000 ANÁLISES.	79
FIGURA 31 – CAVIDADE UTILIZADA NAS ANÁLISES.	80
FIGURA 32 – HISTOGRAMA DOS PARÂMETROS OBTIDOS EM 10000 ANÁLISES.	81
FIGURA 33 – GRÁFICO REPRESENTATIVO DA INSTABILIDADE DO SISTEMA.	83
FIGURA 34 – RESULTADOS DAS TENSÕES (σ_{xx} , σ_{yy}) OBTIDOS DA ANÁLISE COM MAIS PONTOS DE RUPTURA PARA A 5ª SITUAÇÃO.	84
FIGURA 35 – RESULTADOS DAS TENSÕES (σ_1 , σ_3 , σ_{xy}) OBTIDOS DA ANÁLISE COM MAIS PONTOS DE RUPTURA PARA A 5ª SITUAÇÃO.	85
FIGURA 36 – REGIÕES DE RUPTURA RESULTANTES DAS ANÁLISES COM O CRITÉRIO DE HOEK-BROWN.	86
FIGURA 37 – CONTORNO DAS REGIÕES DE RUPTURA ISOTRÓPICA E ANISOTRÓPICA PARA AS SITUAÇÕES 5, 6 E 7.	87
FIGURA 38 – SOBREPOSIÇÃO DAS REGIÕES DE RUPTURA ISOTRÓPICA E ANISOTRÓPICA PARA A 7ª SITUAÇÃO.	87
FIGURA 39 – SOBREPOSIÇÃO DE ALGUMAS REGIÕES DE RUPTURA PARA COMPARAÇÃO.	88
FIGURA 40 – PROBABILIDADE DE RUPTURA PARA O CASO 5 ISOTRÓPICO EM 10000 ANÁLISES.	89
FIGURA 41 – PROBABILIDADE DE RUPTURA PARA O CASO 6 ISOTRÓPICO EM 10000 ANÁLISES.	90
FIGURA 42 – PROBABILIDADE DE RUPTURA PARA O CASO 7 ISOTRÓPICO EM 10000 ANÁLISES.	90
FIGURA 43 – PROBABILIDADE DE RUPTURA PARA O CASO 5 ANISOTRÓPICO EM 10000 ANÁLISES.	91

FIGURA 44 – PROBABILIDADE DE RUPTURA PARA O CASO 6 ANISOTRÓPICO EM 10000 ANÁLISES.	92
FIGURA 45 – PROBABILIDADE DE RUPTURA PARA O CASO 7 ANISOTRÓPICO EM 10000 ANÁLISES.	92
FIGURA 46 – GRÁFICOS DA TENSÕES PRINCIPAIS σ_3 (MPa) \times σ_1 (MPa).	94
FIGURA 47 – REGIÕES DE RUPTURA RESULTANTES DAS ANÁLISES COM O CRITÉRIO DE HOEK-BROWN PARA OS CASOS MAIS CRÍTICOS DA OITAVA E NONA SITUAÇÕES.	96
FIGURA 48 – REGIÕES DE RUPTURA RESULTANTES DAS ANÁLISES COM O CRITÉRIO DE HOEK-BROWN PARA OS CASOS MAIS CRÍTICOS DA DÉCIMA SITUAÇÃO.	97
FIGURA 49 – SOBREPOSIÇÃO DAS TRÊS REGIÕES DE RUPTURA REFERENTES ÀS SITUAÇÕES 8, 9 E 10.	97
FIGURA 50 – SOBREPOSIÇÃO DAS REGIÕES DE RUPTURA ISOTRÓPICA E ANISOTRÓPICA PARA A 10ª SITUAÇÃO.	98
FIGURA 51 – REGIÕES DE RUPTURA RESULTANTES DAS ANÁLISES COM O CRITÉRIO DE HOEK-BROWN PARA OS CASOS MENOS CRÍTICOS.	99
FIGURA 52 – PROBABILIDADE DE RUPTURA PARA O CASO 8 ISOTRÓPICO EM 10000 ANÁLISES.	100
FIGURA 53 – PROBABILIDADE DE RUPTURA PARA O CASO 9 ISOTRÓPICO EM 10000 ANÁLISES.	100
FIGURA 54 – PROBABILIDADE DE RUPTURA PARA O CASO 10 ISOTRÓPICO EM 10000 ANÁLISES.	101
FIGURA 55 – PROBABILIDADE DE RUPTURA PARA O CASO 8 ANISOTRÓPICO EM 10000 ANÁLISES.	101
FIGURA 56 – PROBABILIDADE DE RUPTURA PARA O CASO 9 ANISOTRÓPICO EM 10000 ANÁLISES.	102
FIGURA 57 – PROBABILIDADE DE RUPTURA PARA O CASO 10 ANISOTRÓPICO EM 10000 ANÁLISES.	102
FIGURA 58 – GRÁFICOS DA TENSÕES PRINCIPAIS σ_3 (MPa) \times σ_1 (MPa).	104
FIGURA 59 – COMPONENTES LOCAIS E GLOBAIS DAS FORÇAS DE SUPERFÍCIE.	109
FIGURA 60 – TENSÕES INICIAIS EM MEIO INFINITO.	110
FIGURA 61 – MODELO COM 3 SUB-REGIÕES.	111
FIGURA 62 – MONTAGEM DE H_u	112
FIGURA 63 – MONTAGEM DE G_t	113
FIGURA 64 – SISTEMA DE EQUAÇÕES PARA SUB-REGIÕES.	114
FIGURA 65 – MODELO DE BARRA CONSIDERANDO DUAS E TRÊS SUB-REGIÕES COM AS CONDIÇÕES DE CONTORNO PRESCRITAS.	115

FIGURA 66 – DETALHE DO MODELO DO MACIÇO PRÓXIMO À CAVIDADE CIRCULAR E INDICAÇÃO DIRECIONAL DAS FAMÍLIAS DE DESCONTINUIDADE.	117
FIGURA 67 – MALHAS DE PONTOS INTERNOS UTILIZADAS NAS ANÁLISES PARA A VALIDAÇÃO DO CÓDIGO.	118
FIGURA 68 – REGIÕES DE RUPTURA PARA MODELOS COM MÚLTIPLAS SUB-REGIÕES.	119
FIGURA 69 – MODELO UTILIZADO NA ANÁLISE COM PASSOS DE CARGA. . . .	120
FIGURA 70 – MALHA DE ELEMENTOS ADOTADA PARA O CASO DE PASSOS DE CARGA.	121
FIGURA 71 – RESULTADOS DAS ÁREAS DE RUPTURA PARA OS DOIS PASSOS DE CARGA INICIAIS.	121
FIGURA 72 – RESULTADOS DAS ÁREAS DE RUPTURA PARA OS PASSOS DE CARGA 3 A 8.	122
FIGURA 73 – RESULTADOS DOS DOIS PASSOS DE CARGA FINAIS.	123
FIGURA 74 – ÁREA DE RUPTURA PARA 1 SUB-REGIÃO E 2 SUB-REGIÕES. . . .	123
FIGURA 75 – GRÁFICO DOS PASSOS DE CARGA x ÁREA DE RUPTURA.	124
FIGURA 76 – ESTADO DE TENSÕES PRÓXIMO DA TRINCA.	125
FIGURA 77 – MODELO DE PLACA EM MEIO INFINITO.	125
FIGURA 78 – RESULTADO DA ABERTURA DA TRINCA PARA OS TRÊS MODELOS. .	127
FIGURA 79 – MODELO DE ESTUDO COM UMA FAMÍLIA DE DESCONTINUIDADE. .	128
FIGURA 80 – MALHAS DE PONTOS INTERNOS UTILIZADAS NO PROBLEMA DE UM MACIÇO COM INTERFACES ADERIDAS.	129
FIGURA 81 – RESULTADOS DAS ÁREAS DE RUPTURA DO MACIÇO COM INTERFACES ADERIDAS.	129
FIGURA 82 – RESULTADO DAS ÁREAS DE RUPTURA DOS PASSOS DE CARGAS (1 A 6) PARA O MODELO COM 2 SUB-REGIÕES E RESISTÊNCIA NULA À TRAÇÃO NAS INTERFACES.	130
FIGURA 83 – RESULTADO DAS ÁREAS DE RUPTURA DOS PASSOS DE CARGAS (7 A 10) PARA O MODELO COM 2 SUB-REGIÕES E RESISTÊNCIA NULA À TRAÇÃO NAS INTERFACES.	131
FIGURA 84 – GRÁFICO DA EVOLUÇÃO DAS TENSÕES DE TRAÇÃO NA INTERFACE DE ABERTURA COM O INCREMENTO DE CARGA PARA CADA PASSO DE CARGA (PC).	132
FIGURA 85 – RESULTADO DAS ÁREAS DE RUPTURA DOS PASSOS DE CARGAS (1 E 2) PARA O MODELO COM 2 SUB-REGIÕES E RESISTÊNCIA À TRAÇÃO NAS INTERFACES DE 1,5MPa.	132

FIGURA 86 – RESULTADO DAS ÁREAS DE RUPTURA DOS PASSOS DE CARGAS (3 A 8) PARA O MODELO COM 2 SUB-REGIÕES E RESISTÊNCIA À TRAÇÃO NAS INTERFACES DE 1,5MPa.	133
FIGURA 87 – RESULTADO DAS ÁREAS DE RUPTURA DOS PASSOS DE CARGAS (9 E 10) PARA O MODELO COM 2 SUB-REGIÕES E RESISTÊNCIA À TRAÇÃO NAS INTERFACES DE 1,5MPa.	134
FIGURA 88 – GRÁFICO DOS PASSOS DE CARGA x ÁREA DE RUPTURA.	134
FIGURA 89 – GRÁFICO DOS PASSOS DE CARGA x ÁREA DE RUPTURA COM RESISTÊNCIA À TRAÇÃO NAS INTERFACES VARIANDO DE 0 A 3,5MPa.	135
FIGURA 90 – RESULTADO DAS ÁREAS DE RUPTURA CONSIDERANDO UMA VARIAÇÃO DE RESISTÊNCIA NAS INTERFACES DE 0 E 0,5MPa . . .	135
FIGURA 91 – RESULTADO DAS ÁREAS DE RUPTURA CONSIDERANDO UMA VARIAÇÃO DE RESISTÊNCIA NAS INTERFACES DE 1 A 3,5MPa . . .	136
FIGURA 92 – RESULTADO DA ÁREA DE RUPTURA DO MACIÇO COM ABERTURA.	137
FIGURA 93 – GRÁFICO ILUSTRATIVO DA ABERTURA DA LINHA ACIMA DA CAVIDADE.	137
FIGURA 94 – MODELO UTILIZADO NA ANÁLISE PROBABILÍSTICA.	138
FIGURA 95 – MALHA DE ELEMENTOS ADOTADA PARA O CASO PROBABILÍSTICO.	139
FIGURA 96 – RESULTADO DAS ÁREAS DE RUPTURA DOS PASSOS DE CARGAS (1 A 6) PARA O CASO MAIS CRÍTICO.	140
FIGURA 97 – RESULTADO DAS ÁREAS DE RUPTURA DOS PASSOS DE CARGAS (7 A 10) PARA O CASO MAIS CRÍTICO.	141
FIGURA 98 – RESULTADO DA ÁREA DE RUPTURA PARA O CASO MENOS CRÍTICO.	142
FIGURA 99 – PROBABILIDADE DE ÁREA DE RUPTURA NORMALIZADA.	142

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – DADOS PARA ANÁLISE DO PROBLEMA.	55
TABELA 2 – DADOS PARA ANÁLISE DO PROBLEMA.	63
TABELA 3 – RESULTADOS DAS TENSÕES RADIAIS OBTIDAS PARA O MODELO DA FIGURA 18.	65
TABELA 4 – RESULTADOS DAS TENSÕES ANGULARES OBTIDAS PARA O MO- DELO DA FIGURA 18.	65
TABELA 5 – RESULTADOS DOS DESLOCAMENTOS RADIAIS OBTIDOS PARA O MODELO DA FIGURA 18.	66
TABELA 6 – RESULTADOS DAS TENSÕES RADIAIS OBTIDAS COM O ALGO- RITMO ELABORADO.	67
TABELA 7 – RESULTADOS DAS TENSÕES RADIAIS DO ARTIGO (XIAO; CARTER, 1993).	67
TABELA 8 – DADOS DE ENTRADA PARA AS QUATRO SITUAÇÕES.	72
TABELA 9 – VALORES DAS TENSÕES PRINCIPAIS SIGNIFICATIVAS OBTIDAS EM 1000 ANÁLISES.	76
TABELA 10 – VALORES DOS PARÂMETROS VARIÁVEIS OBTIDOS PARA 1000 ANÁLISES.	78
TABELA 11 – DADOS DE ENTRADA PARA O CASO ANISOTRÓPICO COM DISTRI- BUIÇÃO NORMAL PARA OS PARÂMETROS DO MACIÇO ROCHOSO.	82
TABELA 12 – PARÂMETROS RESULTANTES PARA O CASO COM MAIS PONTOS DE RUPTURA.	84
TABELA 13 – QUADRO DA PROBABILIDADE DE RUPTURA OCORRIDA NOS MODELOS ISOTRÓPICOS E ANISOTRÓPICOS PARA OS CASOS 5, 6 E 7.	93
TABELA 14 – PARÂMETROS UTILIZADOS NO PROGRAMA ROCLAB PARA O TRAÇADO DAS CURVAS DE <i>mi</i>	93
TABELA 15 – DADOS DE ENTRADA PARA O CASO ANISOTRÓPICO COM OS PARÂMETROS DA ROCHA FIXOS.	95
TABELA 16 – PARÂMETROS RESULTANTES PARA O CASO COM MAIS PONTOS DE RUPTURA.	96
TABELA 17 – PARÂMETROS RESULTANTES PARA O CASO COM MENOS PON- TOS DE RUPTURA PARA AS FORMULAÇÕES ANISOTRÓPICAS E ISOTRÓPICAS.	98
TABELA 18 – QUADRO DA PROBABILIDADE DE RUPTURA OCORRIDA NOS MODELOS ISOTRÓPICOS E ANISOTRÓPICOS PARA OS CASOS 8, 9 E 10.	103

TABELA 19 – EQUAÇÕES PARA OS MODOS DE CONTATO.	108
TABELA 20 – EQUAÇÕES PARA O MODO DE CONTATO SEPARADO.	110
TABELA 21 – RESULTADOS DOS DESLOCAMENTOS ANALÍTICO E O CALCULO COM O ALGORITMO.	116
TABELA 22 – PARÂMETROS DE ENTRADA DO MODELO.	116
TABELA 23 – PARÂMETROS DE ENTRADA DO MODELO.	120
TABELA 24 – ÁREAS DE RUPTURA (AR) RESULTANTES PARA CADA PASSO DE CARGA	124
TABELA 25 – PARÂMETROS DE ENTRADA DA PLACA EM ANÁLISE.	125
TABELA 26 – RESULTADOS ANALÍTICOS OBTIDOS COM AS EQUAÇÕES DA MECÂNICA DA FRATURA.	126
TABELA 27 – RESULTADOS DAS TENSÕES (σ_{yy}) OBTIDOS COM O ALGORITMO ELABORADO.	126
TABELA 28 – PARÂMETROS DE ENTRADA DO MODELO.	128
TABELA 29 – PARÂMETROS DE ENTRADA FIXOS NO MODELO.	138
TABELA 30 – PARÂMETROS DE ENTRADA VARIÁVEIS NO MODELO.	138
TABELA 31 – PARÂMETROS RESULTANTES PARA OS CASOS MAIS CRÍTICO E MENOS CRÍTICO.	139

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AR	Área de ruptura
ARN	Área de ruptura normalizada
EDP	Equação diferencial parcial
FDA	Função de distribuição aleatória
FDP	Função Densidade de Probabilidade
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MED	Método dos Elementos Discretos
MEF	Método dos Elementos Finitos
MDF	Método das Diferenças Finitas
NEC	Número de Elementos de Contorno
NPI	Número de Pontos Internos
PARN	Probabilidade da área de ruptura normalizada
RDF	Rede discreta de fraturas
SMC	Simulação de Monte Carlo

LISTA DE SÍMBOLOS

CARACTERES ROMANOS

A_{jk}	Constantes complexas utilizadas nas soluções fundamentais anisotrópicas
b_i, b_i^*	Forças de corpo
c	Coesão do material
c_r	Coesão residual do material
c_μ	Coefficiente de atrito
D_f	Perturbação devido ao fogo
D_{max}	Dano máximo o qual o maciço está sujeito
$DesvP_P$	Desvio padrão
$dist_D$	Representa a extensão máxima da região danificada
$dist_P$	Distância do ponto no domínio até o ponto mais próximo da cavidade
D_{kij}, D_{jli}	Matriz derivada da solução fundamental dos deslocamentos U_{ij}
E	Módulo de elasticidade ou módulo de Young
e_i	Força unitária na direção i
F	Função tensão de Airy
F_P	função que calcula o parâmetro variável
F_δ	Representa a equação do somatório dos quadrados dos deslocamentos de alguns pontos no contorno
GSI	Índice de Resistência Geológica
H^i, G^i	Matrizes H e G obtidas para o domínio Γ^i que multiplica u^i e p^i , respectivamente
H^{ij}, G^{ij}	Matrizes H e G obtidas para o domínio Γ^i que multiplica u^{ij} e p^{ij} , respectivamente
K_I	Fator de intensidade de tensões
K_0	Razão entre a tensão efetiva horizontal e vertical

m_b	Constante m para maciços rochosos fraturados
m_i	Constante adimensional para rocha intacta
$Media_P$	Média
\mathbf{n}	Vetor normal
N_{AL}	Número aleatório
P_{ARN}	Probabilidade da área de ruptura normalizada
p_{1k}, p_{2k}	Constantes de números complexos utilizadas nas soluções fundamentais da anisotropia
P_{min}, P_{max}	Valores mínimo e máximo para o parâmetro variável
q_{jk}	Matriz de números complexos utilizada na solução fundamental das forças de superfície na anisotropia
r	Distância do ponto de aplicação até um ponto fonte
R_{1k}, R_{2k}	Constantes utilizadas nos cálculos de D_{jli} e D_{jli}
s, a	Constantes dependentes das características do maciço rochoso
$S_{k,i,j}, S_{jli}$	Matriz derivada da solução fundamental das forças de superfície T_{ij}
\mathbf{u}	Vetor de deslocamentos
u^{ij}, t^{ij}	Deslocamentos e forças de superfície nos nós do contorno Γ^{ij} como parte do domínio Ω^i
U_{ij}, u^*	Solução fundamental dos deslocamentos
U_1 e U_2	Números aleatórios independentes
\mathbf{t}	Vetor das forças de superfície
T_{ij}, t^*	Matriz que representa a solução fundamental das forças de superfície
Z	Variável aleatória com distribuição normal
z'_k	Variável complexa para o ponto fonte
z_k	Variável complexa para o ponto campo

CARACTERES GREGOS

α	Ângulo formado entre a abcissa x e a normal (n_1)
β_{ij}	Matriz das constantes anisotrópicas do material
γ	Deformação tangencial
Γ	Representa do contorno de um problema
δ_{ij}	Delta de Kronecker
δ_{xn}	Deslocamento na direção x num ponto do contorno
δ_{yn}	Deslocamento na direção y num ponto do contorno
∂	Derivada Parcial
ε	Deformação normal
φ	Ângulo formado entre a abcissa x e r , ou seja, a soma dos ângulos α e θ
λ	Constante de <i>Lamé</i>
μ	Módulo de cisalhamento
ν	Coeficiente de Poisson
ω_k	Variação dos deslocamentos para o caso de sub-regiões
Ω	Representa do domínio de um problema
Φ	Função que satisfaz as condições de contorno na anisotropia
ϕ	Ângulo de atrito
ϕ_r	Ângulo de atrito residual
σ	Tensões
σ^0	Tensões iniciais
σ_1	Tensão principal maior
σ_3	Tensão principal menor
σ_c	Resistência à compressão uniaxial da rocha intacta
σ_h	Tensão horizontal
σ_k	Variação das forças de superfície no caso de sub-regiões

σ_n	Tensão normal
σ_v	Tensão vertical
τ	Tensão cisalhante
θ	Ângulo formado entre a normal (n_1) e r

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	24
1.1 METODOLOGIA UTILIZADA	27
1.2 OBJETIVOS DO TRABALHO	28
1.3 MOTIVAÇÕES E CONTRIBUIÇÃO CIENTÍFICA	28
1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO	29
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	30
2.1 MODELAGEM CONSIDERANDO ANISOTROPIA DO MATERIAL	30
2.2 MODELAGEM DO MEC PARA MACIÇOS ROCHOSOS	31
2.3 ANÁLISE PROBABILÍSTICA	33
2.4 DESCONTINUIDADES	34
2.5 CONTEXTUALIZAÇÃO	36
3 FORMULAÇÃO DO MÉTODOS DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA MEIOS ELÁSTICOS	37
3.1 TEORIA DA ELASTICIDADE	37
3.2 TEOREMA DA RECIPROCIDADE DE BETTI	39
3.3 EQUAÇÕES INTEGRAIS DO CONTORNO	40
3.4 SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS	41
3.5 EQUAÇÃO PARA DESLOCAMENTO NO CONTORNO	43
3.6 REGIÕES INFINITAS	45
3.7 DISCRETIZAÇÃO NUMÉRICA	46
3.7.1 Elementos Constantes	46
3.7.2 Elementos Isoparamétricos Lineares	46
3.8 TENSÕES INICIAIS NO DOMÍNIO	48
3.9 CRITÉRIOS DE RUPTURA APLICADOS A MACIÇOS ROCHOSOS	49
3.9.1 Critério de Ruptura de Mohr-Coulomb	49
3.9.2 Critério de Ruptura de Hoek-Brown	50
3.10 VALIDAÇÃO DO ALGORITMO ISOTRÓPICO PARA AS TENSÕES INICIAIS	54
4 FORMULAÇÃO DO MEC PARA MEIOS ANISOTRÓPICOS	57
4.1 SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS PARA ANISOTROPIA	59
4.2 EQUAÇÃO INTEGRAL DO CONTORNO PARA ANISOTROPIA	61
4.3 SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS INTEGRAIS PARA O CASO ANISOTRÓPICO	61
4.4 VALIDAÇÃO DO ALGORITMO CONSIDERANDO A ANISOTROPIA DO MATERIAL	63
5 ANÁLISE PROBABILÍSTICA APLICADA À ANÁLISE DE TÚNEIS	68
5.1 ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE UM PROJETO	68
5.2 INCERTEZAS DOS DADOS	69
5.3 MÉTODO DE MONTE CARLO	69

5.3.1 Amostragem de Números Aleatórios	70
5.3.2 Distribuições Uniforme e Normal	70
5.4 RESULTADOS DA INFLUÊNCIA DAS TENSÕES INICIAIS PARA MATERIAL ISOTRÓPICO	71
5.4.1 Primeira Situação	74
5.4.2 Segunda Situação	75
5.4.3 Terceira Situação	76
5.4.4 Quarta Situação	77
5.5 VALIDAÇÃO DO CÓDIGO ANISOTRÓPICO COM O MÉTODO DE MONTE CARLO	79
5.5.1 Testes com Distribuição Normal para os Parâmetros do Maciço Rochoso	80
5.5.2 Testes com Valores Fixos para os Parâmetros do Maciço Rochoso	95
6 DESCONTINUIDADES EM MACIÇOS ANISOTRÓPICOS - FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS DE CONTATO COM TENSÕES INICIAIS	105
6.1 PRINCIPAIS PARÂMETROS DE UMA DESCONTINUIDADE	105
6.2 MECÂNICA DO CONTATO	106
6.2.1 Classificação do Contato	107
6.2.2 Modos de Contato	107
6.2.3 Sistema de Coordenadas Local para o Contato	108
6.3 IMPLEMENTAÇÃO DOS PASSOS DE CARGA E PROCESSO ITERATIVO . . .	109
6.4 MODELAGEM DE UM DOMÍNIO COM MÚLTIPLAS SUB-REGIÕES	110
7 RESULTADOS COM MÚLTIPLAS DESCONTINUIDADES	115
7.1 PROBLEMA DE BARRA COM DUAS E TRÊS SUB-REGIÕES	115
7.2 PROBLEMA DE CAVIDADE EM MEIO INFINITO COM MÚLTIPLAS SUB-REGIÕES E INTERFACES ADERIDAS	116
7.3 MODELO CONSIDERANDO PASSOS DE CARGA	120
7.4 PROBLEMA DE INTERFACE ABERTA EM MEIO INFINITO	124
7.5 PROBLEMA DE CAVIDADE EM MEIO INFINITO COM MÚLTIPLAS SUB-REGIÕES ANISOTRÓPICAS E INTERFACE COM POTENCIAL DE ABERTURA	127
7.6 MODELO PROBABILÍSTICO COM PASSOS DE CARGA E DESCONTINUIDADES	137
8 CONCLUSÕES	143
8.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	144
REFERÊNCIAS	146

1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento demanda infraestrutura, a sociedade contemporânea tem uma necessidade crescente de otimização dos transportes para a circulação de pessoas, produtos, mercadorias e informação; portanto, a demanda por traçados mais adequados é cada vez mais intensa. Uma das respostas a esta demanda é oferecida pelos túneis, pois essas estruturas são capazes de unir dois pontos por meio de uma trajetória adequada, possibilitando superar problemas topográficos com eficiência.

Recentemente, foi inaugurado o projeto do túnel de São Gotardo (ver figura 1), na Suíça, que demorou 17 anos e custou aproximadamente 11 bilhões de euros, destacando-se o fato de que foi cumprido dentro do orçamento e prazo especificados. O túnel interliga as cidades de *Erstfeld* e *Bodio* prometendo revolucionar o transporte de pessoas e mercadorias entre o norte e o sul da Europa.



FIGURA 1 – VISTA INTERNA DO TÚNEL DE SÃO GOTARDO.

FONTE – WWW.EUROTRANSPORT.DE/NEWS/GOTTHARD-BASISTUNNEL-SCHNELLER-NACH-ITALIEN-6784334.HTML

Os túneis podem resolver a questão do melhor trajeto, mas implicam em alto custo somado à necessidade de um estudo científico aprofundado multidisciplinar. Portanto, o presente trabalho visa trazer uma contribuição para a análise de estabilidade por meio da modelagem

numérica aplicada à um túnel hipotético, cujo objetivo é avaliar a integridade estrutural e segurança desse tipo de estrutura.

A construção de túneis inicia-se por campanhas de sondagens e ensaios de caracterização (abrasividade, fraturamento hidráulico, resistência, etc), ao longo do eixo do túnel. Na sequência dá-se o processo de escavação (explosivos, tuneladoras, etc), passando-se à verificação da integridade estrutural e necessidade de aplicação de reforços (a exemplo de tirantes, escoras); finalizando com o revestimento e adicionando os elementos relativos à finalidade do túnel (estrada férrea, asfalto, iluminação, dentre outros).

Com o avanço tecnológico, a modelagem numérica de maciços rochosos teve um crescimento expressivo no campo da engenharia variando da microescala, ou seja, da deformação nos grãos, à deformação numa estrutura da litosfera. Levando em consideração a complexidade da natureza da rocha, os resultados experimentais e as simplificações obtidas em campo devem ser utilizados com cuidado na calibração do modelo computacional. Além disso, outro fator importante e necessário é consultar geólogos que possuem uma vasta experiência em campo, além de se ter um certo conhecimento a respeito de metodologias numéricas aplicadas para o estudo.

Para representar adequadamente um modelo computacional de um maciço rochoso deve-se considerar as propriedades mecânicas do material. Em engenharia, dentre as classificações adotadas para rochas tem-se: CHILE (*Continuous, Homogeneous, Isotropic and Linearly Elastic*) e DIANE (*Discontinuous, Inhomogeneous, Anisotropic, and Non-Elastic*) (HARRISON; HUDSON, 2000). Além disso, é importante incluir as seguintes características (JING, 2003) numa modelagem:

- Utilizar métodos físicos relevantes além de adotar equações diferenciais parciais (EDPs) adequadas para representar matematicamente o problema, principalmente quando há a combinação de temperatura, meio hidráulico e esforços mecânicos atuantes na estrutura;
- Aplicar as leis constitutivas com as variáveis e os parâmetros associados ao problema;
- Considerar o estado de tensões pré-existent na rocha (o maciço rochoso possui tensões iniciais);
- Inserir a temperatura e a pressão de água atuante no maciço (o maciço rochoso é poroso, fraturado e aquecido por um gradiente de temperatura natural ou por fontes de calor geradas pelo homem);
- Considerar a presença de fraturas naturais (descontinuidade do material);
- Considerar a escala apropriada ao problema;
- Considerar efeitos resultantes das perturbações em engenharia por exemplo a geometria pode ser alterada.

Os métodos numéricos mais comuns aplicados em problemas de mecânica das rochas estão subdivididos em:

Métodos por meios Contínuos: Método das Diferenças Finitas (MDF) (LEVEQUE, 2007), Método dos Elementos Finitos (MEF) (ZIENKIEWICZ, 1977) e Método dos Elementos de Contorno (MEC) (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984).

Métodos por meios Descontínuos: Rede Discreta de Fraturas (RDF) (MCCLURE, 2013) e Método dos Elementos Discretos (MED) (JING; STEPHANSSON, 2007).

Métodos Híbridos (Modelos Contínuos e Descontínuos): MEF/MEC (ZIENKIEWICZ; KELLY; BETTESS, 1977), MED/MEC (LEMONS, 1987), MEF/MED (PAN; REED, 1991), dentre outros.

O método das diferenças finitas (MDF) baseia-se na solução de equações diferenciais parciais (EDPs) através de uma aproximação direta das derivadas por diferenças finitas. A resposta do sistema de equações é obtida desde que sejam definidas as condições iniciais e de contorno. Além disso, é considerado um dos métodos numéricos mais antigos.

O método dos elementos finitos (MEF) consiste na discretização do domínio num conjunto de subdomínios (elementos) com número fixo de nós nos vértices de cada elemento. Normalmente, são utilizadas equações polinomiais para aproximação das EDPs no sistema local dos elementos que geram as equações globais que representam o comportamento dos elementos. Atualmente, é o método mais aplicado no campo da engenharia devido à sua flexibilidade na consideração da heterogeneidade do material, não-linearidade e condições de contorno. Além disso, há diversos programas comerciais, cujo código foi desenvolvido em MEF, e que fornecem resultados aceitáveis numa análise estrutural.

No método dos elementos de contorno (MEC) é necessário fazer apenas a discretização do contorno para a solução do domínio, reduzindo assim o custo computacional. Além disso, possui uma precisão maior, quando comparado com MDF e MEF, para diversos tipos de problemas, como a análise de propagação de fraturas, por exemplo. Para análise de domínios infinitos é o mais apropriado devido ao fato de se poder utilizar as soluções fundamentais das EDPs em tais domínios.

O método dos elementos discretos (MED) é um dos métodos mais recentes, se comparado aos anteriores, e se concentra principalmente em aplicações para meios geológicos fraturados ou partículas. A essência deste método é representar um meio fraturado como um conjunto de blocos formados por fraturas conectadas no domínio e resolver as equações do movimento por meio do tratamento do contato entre os blocos. Os elementos discretos podem ser rígidos ou deformáveis. Uma vantagem deste método é que grandes deslocamentos, provocados por movimento de corpo rígido podem ser inseridos numa análise estrutural, incluindo a rotação dos blocos, a abertura de fratura e os deslocamentos. O movimento de corpo rígido não provoca deformação dentro do bloco, mas sim deslocamento do mesmo em

grande escala. A aproximação do contínuo reflete na deformação do material e, por este motivo, o modo de deformação gerado pelo movimento de corpo rígido não é incluído, uma vez que não produz deformação nos elementos. Entretanto, o sistema discreto reflete no movimento do membro do sistema.

A escolha por qual método deve ser utilizado, seja ele contínuo ou descontínuo, depende de muitos fatores do problema específico, sendo que os dois mais importantes deles estão ligados à escala do problema e à fratura existente na geometria. A aproximação do meio contínuo deve ser usada para maciços rochosos com ou sem fraturas, pois o comportamento é estabelecido por meio das propriedades equivalentes fixadas através de um processo de homogeneização. Este tipo de aproximação pode ser usada somente se as seguintes condições forem atendidas: poucas fraturas estiverem presentes, não haja abertura de fratura e que não exista um desprendimento completo de um bloco. Por outro lado, a abordagem de aproximação para um sistema discreto é mais adequada para maciços rochosos moderadamente fraturada tendo em vista que o número de fraturas existente geralmente é grande.

Em se tratando do meio em que se encontra o modelo estrutural a ser analisado, pode-se citar o maciço rochoso que é o objeto principal tratado nesta tese. Portanto, é importante e necessário desenvolver um conhecimento das propriedades geométricas, mecânicas e hidrológicas das descontinuidades, pois a estabilidade de uma superfície ou escavação subterrânea está diretamente ligada à caracterização destes elementos que fazem parte do maciço (HARRISON; HUDSON, 2000).

Para este trabalho, optou-se por estudar formulações do Método dos Elementos de Contorno por ser apropriado à análise em domínios infinitos, como é o caso de túneis escavados em rocha. Além disso, conhecidas as soluções fundamentais que regem o problema, é possível obter resultados com uma precisão melhor quando comparada com a de outros métodos numéricos. Outra vantagem deste método deve-se ao fato de a discretização ser feita apenas no contorno, facilitando a obtenção dos resultados do domínio.

1.1 METODOLOGIA UTILIZADA

Inicialmente foi realizada uma pesquisa bibliográfica envolvendo artigos científicos, bibliografia consagrada, teses, dissertações e relatórios técnicos estrangeiros.

Na sequência partiu-se para a implementação do código computacional utilizando o Método dos Elementos de Contorno por meio da linguagem de programação Fortran, para análise de problemas de elasticidade sob o estado plano de deformações.

Considerou-se a hipótese de que ensaios de campo e análises do modelo geológico representativo possibilitam estimar os intervalos e funções probabilísticas de cada parâmetro do tensor de tensões iniciais. Por meio da aplicação do método de Monte Carlo avalia-se a distribuição dos resultados de tensões críticas no maciço. No programa computacional, as

tensões iniciais foram inseridas pela aplicação de forças de superfície no perímetro da escavação, que compatibilizam a condição de deformação do perímetro da seção escavada no maciço sob tensões iniciais com a geometria indeformada do túnel. Com relação à verificação dos critérios de ruptura, optou-se por utilizar o critério de Hoek-Brown.

Quanto à análise das descontinuidades, valeu-se da aplicação de mecânica do contato sobre o método de múltiplas sub-regiões.

1.2 OBJETIVOS DO TRABALHO

Um dos objetivos deste trabalho é desenvolver uma metodologia para análises de estabilidade de túneis escavados em rocha utilizando materiais isotrópicos e anisotrópicos. Com isto, será possível fazer uma comparação dos resultados para averiguar qual das modelagens melhor atende aos critérios de segurança.

Tendo em vista a natureza heterogênea do problema, outro objetivo desta pesquisa constitui-se em preparar algoritmos auxiliares ao código principal para a inclusão de um modelo probabilístico de análise com a introdução das incertezas inerentes aos parâmetros de entrada do modelo computacional. Esta implementação é ilustrada considerando um modelo básico elástico linear em meios com um campo de tensões iniciais cujos parâmetros são representados por funções densidade de probabilidade uniforme e normal.

Para finalizar, é feita a inclusão de sub-regiões e da mecânica do contato, utilizando um processo iterativo em conjunto com passos de carga, cujo objetivo é avaliar o impacto da presença das descontinuidades sujeitas à separação no campo de tensões e deformações do maciço próximo à cavidade.

1.3 MOTIVAÇÕES E CONTRIBUIÇÃO CIENTÍFICA

Umas das motivações que levou ao desenvolvimento deste trabalho é destacar a importância da realização de ensaios (laboratoriais e *in situ*) necessários para caracterização dos parâmetros de um maciço rochoso. Porém, nem sempre é possível ter o conhecimento a priori destes parâmetros que são fundamentais numa modelagem numérica visando a estabilidade de um túnel. Portanto, com este trabalho pretende-se auxiliar na resposta à seguinte pergunta: "Quais parâmetros são necessários para investir em ensaios laboratoriais e *in situ* para se ter uma análise de estabilidade segura?"

A principal contribuição científica deste trabalho compreende a combinação de formulações do Método dos Elementos de Contorno para problemas anisotrópicos de elasticidade com múltiplas sub-regiões, cargas incrementais e mecânica do contato associada às famílias de descontinuidades do meio. Considera-se, todo esse contexto dentro de um enfoque probabilístico, via método de Monte Carlo, com aplicação em mecânica das rochas.

Outra motivação que desencadeou esta pesquisa foi o fato de ela estar inserida em um projeto de pesquisa e desenvolvimento (P&D CEMIG/FAPEMIG APQ-03274-11 GT499) junto às empresas: Institutos Lactec e CEMIG/FAPEMIG. Este projeto intitula-se: "Metodologia para quantificação de riscos e definição de contingenciamentos em contratos de obras".

Por fim, a motivação prática deste trabalho é demonstrar para as empresas construtoras de túneis a fundamental importância de se investir em ensaios *in situ* e laboratoriais, os quais são base de dados de confiabilidade razoável para informar o programa, e com isso, possibilitar o desenvolvimento de projetos seguros protegendo vidas e poupando recursos.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está organizado em oito capítulos, sendo o primeiro destinado a uma breve contextualização do estudo realizado. O Capítulo 2 destina-se à revisão bibliográfica. No Capítulo 3, é descrita a formulação clássica do MEC, incluindo os critérios de ruptura adotados nas análises. Além disso, é exibida a validação do algoritmo isotrópico com a aplicação das tensões *in situ*.

O Capítulo 4 apresenta a formulação do MEC para meios anisotrópicos e a validação da formulação por meio de exemplos numéricos. Já no Capítulo 5 é apresentado o Método de Monte Carlo com aplicações das formulações do MEC, em meios isotrópicos e anisotrópicos, cujo objetivo é avaliar o impacto das incertezas dos parâmetros de entrada do maciço rochoso.

No Capítulo 6, apresenta-se uma breve introdução às descontinuidades em conjunto com a formulação de elementos de contato; incluindo as tensões iniciais, passos de carga e o processo iterativo. Tudo isso voltado para a modelagem das descontinuidades em maciços rochosos anisotrópicos.

Exemplos de aplicação e validação do algoritmo desenvolvido, para análise das descontinuidades, estão presentes no Capítulo 7.

As conclusões alcançadas, por meio de resultados numéricos dos modelos testados, são apresentadas no Capítulo 8. Por fim, são inseridas as referências bibliográficas utilizadas para a elaboração deste trabalho.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A abordagem tradicional do MEC, para problemas de elasticidade considerando meios isotrópicos, já foi tratada por diversos autores como Rizzo (1967), Cruse (1975), Kuhn e Möhrmann (1983), Brebbia, Telles e Wrobel (1984), Aliabadi (2002), dentre outros. Neste capítulo será apresentada uma revisão com enfoque nos trabalhos que utilizaram: a formulação do MEC para meios anisotrópicos e maciços rochosos, análises probabilísticas e de descontinuidades com sub-regiões.

2.1 MODELAGEM CONSIDERANDO ANISOTROPIA DO MATERIAL

A primeira aplicação do MEC para determinação das tensões em problemas bidimensionais considerando a anisotropia do material foi apresentada por Rizzo e Shippy (1970). Em seguida, Vogel e Rizzo (1973) apresentaram uma equação integral de contorno para problemas tridimensionais.

Nishimura e Kobayashi (1983) desenvolveram um método indireto para problemas tridimensionais com o uso da Transformada de Fourier e do cálculo de resíduos, para a obtenção de uma equação em termos de uma integral sobre um meio finito adequado para análise numérica. Este método foi utilizado para a análise tridimensional de tensões em túneis considerando a rocha anisotrópica.

Deb e Banerjee (1990) apresentaram integrais particulares, levando em consideração as forças de corpo inerciais e centrífugas, para problemas bidimensionais de elasticidade com anisotropia.

Vanalli (2004) desenvolveu formulações utilizando o MEC e o MEF para análise bidimensional estática de meios contínuos anisotrópicos reforçados ou não por fibras. O MEF foi programado para considerar o reforço das fibras. No emprego do MEC reside a originalidade deste trabalho, que fez a análise de plasticidade e viscoplasticidade em meios considerando a anisotropia.

Rodríguez-Tembleque et al. (2010) desenvolveram um método numérico, por meio de elementos de contorno, para o estudo tridimensional direcionado à problemas de contato com comportamento elástico anisotrópico. Com relação às condições de contato, adotou-se a Lei do Atrito de Coulomb.

Wünsche, Sánchez e Sáez (2012) criaram uma nova solução fundamental com variáveis complexas, utilizando o MEC juntamente com o tratamento de integrais hipersingulares para materiais anisotrópicos. Essa solução foi aplicada à análise da flexão de placas Kirchhoff onde, por meio de exemplos numéricos, provaram uma maior eficiência de suas novas formulações do

MEC frente às anteriores.

Useche, Albuquerque e Solero (2012) aplicaram a formulação do MEC no domínio do tempo para análises harmônicas e modais de deformações cisalhantes para placas ortotrópicas fissuradas. Com relação à modelagem das fissuras na placa, foi utilizada a técnica de multidomínios. Os resultados numéricos obtidos apresentaram uma boa convergência quando comparados aos resultados obtidos com o MEF.

Rafiezadeh e Ataie-Ashtiani (2013) analisaram a infiltração para problemas de multidomínios em meio anisotrópico. Neste artigo foi apresentada a equação que rege a anisotropia transformada para a equação de Laplace.

Tu et al. (2013) apresentaram uma técnica bidimensional com o MEC para análise de problemas da mecânica da fratura linear elástica, cujo objetivo foi avaliar o fator de intensidade das tensões em fissuras ocorridas em meios anisotrópicos. As equações foram desenvolvidas da combinação das formulações de Chen (CHEN; PAN; AMADEI, 1998) com as funções de Green derivadas de Ke et al. (2012), que simulou a propagação de fissuras em materiais anisotrópicos e isotrópicos combinada com o critério de tensão circunferencial máxima. No artigo (TU et al., 2013) concluiu-se que a anisotropia do material pode afetar significativamente o fator de intensidade de tensão.

Chen e Hwu (2013), por meio das soluções fundamentais anisotrópicas e o método da reciprocidade dual, realizaram análises dinâmicas de placas elásticas, em meio anisotrópico, contendo furos, fissuras ou interfaces.

Liu e Sarler (2014) desenvolveram um método não singular para soluções fundamentais de problemas bidimensionais da elasticidade linear anisotrópica. A precisão e a viabilidade deste método são abordadas de forma comparativa com o método de solução fundamental e as soluções analíticas para um espectro, sob estado plano de deformação, meio anisotrópico.

2.2 MODELAGEM DO MEC PARA MACIÇOS ROCHOSOS

Investigações geológicas geotécnicas são de extrema importância no que diz respeito à escolha do local onde se pretende efetuar a perfuração de um túnel. Com isso, realizar ensaios laboratoriais e de campo, a fim de obter os parâmetros do maciço rochoso, é fundamental para minimizar as incertezas e garantir a segurança, conferindo maior qualidade de construção (JAREK; ASSIS; LACERDA, 2014).

Crouch e Starfield (1983) apresentam formulações e aplicações do MEC para resolver uma variedade de problemas relacionados à mecânica dos sólidos. O Capítulo 8 do trabalho de Crouch e Starfield (1983) utiliza o MEC como ferramenta para analisar as tensões em problemas de mecânica das rochas e geologia de engenharia.

Outros trabalhos em mecânica das rochas e do MEC visando a análise de tensões e

deformações em escavações subterrâneas que podem ser citados são: Hoek e Brown (1982), Brebbia (1987), Pande, Beer e Williams (1990) e Beer e Watson (1992).

Xiao e Carter (1993) fizeram uma análise, aplicando a técnica de elementos de contorno utilizando as soluções fundamentais de Lekhnitskii (1981), para maciços rochosos anisotrópicos. Um dos exemplos apresentados neste artigo será utilizado na seção 4.4 para validação do modelo anisotrópico.

Mansur et al. (1996) aplicaram uma técnica de análise para obtenção do estado de tensões iniciais atuantes em maciços rochosos escavados. O modelo de elementos de contorno utilizado para as análises destinava-se a problemas de maciços rochosos elásticos lineares, isotrópicos, homogêneos e contínuos. Os resultados obtidos foram comparados aos ensaios de macaco plano de pequena área (*SFJ*¹).

Cerrolaza e Garcia (1997) apresentaram um modelo, aplicando a técnica do MEC com sub-regiões, que estimava o comportamento do maciço rochoso danificado em processo de escavação onde o meio utilizado era anisotrópico, heterogêneo e não linear. Para validação do modelo proposto, um exemplo de uma seção circular de um túnel em meio homogêneo, isotrópico e linear elástico é apresentado. O modelo proposto é capaz de prever o comportamento não linear de um maciço rochoso por meio do uso de um modelo isotrópico de dano. Com os exemplos numéricos expostos, mostra-se a precisão da técnica abordada sobre os comportamentos elásticos e não lineares bem como em meios anisotrópicos e heterogêneos. Além do meio anisotrópico é apresentado um exemplo cujo material é admitido como isotrópico.

Beer (2010) aplicou a técnica do MEC para simulação da construção de túneis escavados em rocha. Para esta análise foi considerado comportamento não linear e heterogêneo, fundamentado nos estudos de Venturini (1983).

Quim (2010) desenvolveu uma formulação do MEC isoparamétrico para análise de domínios bidimensionais enrijecidos, para o caso específico de túneis. Ao invés da técnica de sub-regiões, este trabalho apresentou uma forma alternativa para solução de problemas a partir do MEC incluindo o campo de tensões iniciais.

Duenser e Beer (2012) utilizaram o MEC para aplicação de problemas, com apenas uma região, onde a geometria e as condições de contorno mudavam com tempo. Para isso, foi apresentado um exemplo de escavação sequencial para construção de um túnel. Como o problema resolvido era tridimensional, o modelo numérico com uma região apresentou vantagens em relação ao método de sub-regiões devido à redução no número de incógnitas. Além disso, os resultados obtidos foram precisos apesar de algumas singularidades surgidas nos cantos.

¹ *Small Flat Jack* (SFJ) mais conhecido como o ensaio de macaco plano de pequena área para determinação do estado de tensões *in situ* da rocha.

2.3 ANÁLISE PROBABILÍSTICA

Quando se analisa a estabilidade de um túnel, uma atenção especial deve ser dada às incertezas inerentes ao maciço rochoso em questão. Para isto, é importante realizar ensaios laboratoriais e avaliar os parâmetros por meio de estudos probabilísticos. Neste contexto, são apresentados alguns artigos relacionados ao tema.

Hoek (1998) aplicou a análise de confiabilidade no cálculo de estabilidade de projetos de talude e túnel. Neste trabalho foi utilizado o critério de Hoek-Brown, sendo que três dos parâmetros de entrada (Índice de Resistência Geológica (GSI), constante da rocha intacta (m_i) e resistência à compressão uniaxial da rocha (σ_c)) foram definidos por uma distribuição normal. Para essas análises utilizou-se o Método de Monte Carlo, por meio do software @RISK, onde os parâmetros de saída calculados foram: ângulo de atrito, coesão, resistência a compressão uniaxial e o módulo de deformabilidade. Para o comportamento do talude foram calculados os fatores de segurança utilizando o método de Bishop, onde os resultados são apresentados por um gráfico da distribuição de probabilidade normal do fator de segurança. Já no caso do túnel, os resultados são apresentados por distribuições log-normal da probabilidade em diferentes condições para pressão de suporte tanto para a zona plástica quanto para deformação do túnel. Com este trabalho concluiu-se que as incertezas associadas às propriedades do maciço rochoso *in situ* tem um impacto significativo nos projetos de taludes e escavações em rochas.

Lü e Low (2011) apresentam um estudo contendo análises probabilísticas de escavações subterrâneas em rocha, utilizando o método de confiabilidade de primeira e segunda ordem (FORM/SORM), para avaliar a probabilidade de falha do modelo. Este trabalho avalia dois critérios de ruptura, o Mohr-Coulomb e o Hoek-Brown, para um túnel circular cujas respostas são conhecidas. Além disso, os autores utilizam a Simulação de Monte Carlo para comparar os resultados da probabilidade de falha obtidos com o método proposto (FORM/SORM). Uma das conclusões foi que a pressão de suporte do túnel tem alta influência no cálculo da probabilidade de falha, pois quanto maior é a pressão do suporte menor é a probabilidade de falha do maciço. Para o modelo de Mohr Coulomb, a conclusão foi de que quando não há correlação entre o ângulo de atrito e a coesão existe, uma probabilidade alta de exceder o deslocamento admissível o que torna os resultados mais conservadores em relação aos casos em que os parâmetros foram correlacionados negativamente.

Mao, Al-Bittar e Soubra (2012) aplicaram a análise probabilística para avaliar a função densidade de probabilidade (FDP) da capacidade de suporte limite para uma fundação rasa num maciço rochoso. O critério de ruptura adotado foi Hoek-Brown onde os parâmetros presentes neste critério (GSI , σ_c , m_i e D) são considerados como variáveis aleatórias. A ideia deste trabalho foi avaliar alguns casos de carregamentos verticais e inclinados utilizando a metodologia da Expansão do Caos Polinomial (ECP)² baseada em análises de probabilidade e confiabilidade.

² ECP é a metodologia que visa substituir o modelo determinístico (incertezas dos parâmetros de entrada são definidas por variáveis aleatórias) por uma equação simples analítica aproximada chamada de meta-modelo.

Para cargas aplicadas verticalmente, concluiu-se que a variabilidade da capacidade de suporte aumenta com o aumento das variáveis aleatórias GSI e σ_c . Entretanto, uma correlação negativa destas variáveis conduz a uma menor propagação da função FDP. Já para o caso de carregamentos inclinados, a variabilidade da capacidade de suporte limite diminui com o aumento da inclinação da carga. Porém, o coeficiente de variação desta capacidade de suporte é constante e independe da inclinação da carga.

Li et al. (2012) apresentam avaliações de confiabilidade para taludes rochosos baseadas no critério de ruptura de Hoek-Brown. Por meio de estudos probabilísticos utilizando Monte Carlo, o presente artigo detalha um procedimento para determinação do fator de segurança necessário para projeto de taludes em meios rochosos.

Langford e Diederichs (2015) avaliaram, por meio do critério de Hoek-Brown Generalizado, as incertezas existentes no maciço rochoso. Para isso, os autores propõem abordagens utilizando regressões linear e não-linear de forma a determinar com precisão a envoltória de resistência da rocha intacta e quantificar as incertezas dos dados resultantes de ensaios. Com isto, uma das conclusões é que as incertezas relacionadas à resistência da rocha intacta podem ser analisadas por meio de métodos regressivos que utilizam dados de laboratório para avaliar a correlação existente entre a resistência uniaxial da rocha e a constante m_i . Além disso, os dois novos métodos de regressão propostos (linear com modificação da zona de tração e o não linear) superaram o método linear ordinário dos mínimos quadrados que não foi capaz de quantificar adequadamente os dados apesar de fornecer um ajuste médio preciso.

2.4 DESCONTINUIDADES

É extremamente importante avaliar as discontinuidades numa análise de estabilidade de obras em rocha. Modelar este tipo de elemento estrutural, por meio do método dos elementos de contorno, é possível desde que sejam incluídas as condições de contato inerentes ao problema. Dentre as diversas formas existentes para efetuar a modelagem de uma falha com o MEC pode-se citar a formulação contendo sub-regiões.

Crotty e Wardle (1985) apresentaram uma nova formulação utilizando MEC para modelagem estrutural das discontinuidades da rocha, tal como falhas e juntas geológicas num meio heterogêneo. Neste trabalho a discontinuidade é tratada por um tipo especial de interface e o critério de ruptura adotado foi de Mohr-Coulomb. O tratamento das juntas é feito iterativamente considerando um comportamento não linear.

Rocha (1988) utilizou o MEC para modelagem das discontinuidades que são analisadas por meio de forças fictícias, denominadas de quadripolos (2D) e bipolos (3D). O modelo numérico elaborado foi implementado para inclusão de sub-regiões as quais podem possuir características mecânicas diferentes. Este trabalho objetivou analisar dois casos: um muro de arrimo sujeito à pressão d'água e do solo; e um túnel com uma discontinuidade na rocha acima

da superfície superior.

Carter e Xiao (1994) apresentaram a formulação de acoplamento do MEF com o MEC para simular o comportamento elástico de juntas em rochas numa escavação. O maciço rochoso foi modelado como um meio contínuo elástico anisotrópico devido à presença de juntas. O MEF foi aplicado no campo mais próximo da rocha enquanto o MEC serviu para modelar o contorno mais distante. Concluíram que a presença de juntas induz a anisotropia no maciço rochoso. Além disso, o espaçamento e a orientação das mesmas produz uma influência considerável no comportamento do maciço.

Beer e Poulsen (1994) utilizaram o MEC considerando multi-regiões para efetuar a modelagem não-linear das interfaces que representam as falhas presentes em rochas. Entretanto, o material adotado foi o isotrópico com comportamento elástico. Além disso, este trabalho apresentou um novo método para tratamento das juntas de forma a eliminar a necessidade de especificar os parâmetros de rigidez da junta. Com isso, o programa é capaz de modelar o movimento das falhas em poucas iterações.

Hammah, Yacoub e Corkum (2008) apresentaram uma breve discussão sobre o efeito provocado pelas descontinuidades num maciço rochoso por meio do Método da Redução da Resistência ao Cisalhamento acoplado ao Método dos Elementos Finitos. Diferentemente do que se estuda na teoria clássica de elasticidade ou elasto-plasticidade, as descontinuidades provocam uma redistribuição das tensões e deslocamentos induzidos num maciço rochoso. Portanto, o comportamento de um maciço rochoso sobre uma escavação, depende consideravelmente das deformações advindas das descontinuidades.

Ritz, Mutlu e Pollard (2011) apresentaram uma combinação entre o Método do Deslocamento Descontínuo (MDD) e uma formulação complementar para simular o deslizamento quase-estático sobre a trinca em modelos, considerando falhas e fraturas de um material linear elástico isotrópico. O algoritmo complementar inserido serve para corrigir a solução do MDD e incluir as propriedades do contato, sejam elas: de separação, abertura ou aderência.

Fattah, Shlash e Al-Soud (2012) utilizaram o programa de elementos de contorno para múltiplas regiões e interação solo-estrutura (MRBEM) para analisar o problema de um túnel circular (2-D) em solo argiloso. Para a análise do modelo sob estado plano de deformação foi adotado um meio infinito, homogêneo, linear elástico e isotrópico. Uma das conclusões foi de que as máximas tensões ocorrem no teto e na base do túnel. Além disso, a existência de um túnel afeta mais os deslocamentos horizontais do que os verticais.

Ghiasian e Ahmadi (2015) apresentaram um modelo de elemento não-linear de junta, acoplado ao comportamento de tensão de cisalhamento, utilizando múltiplos domínios na formulação tridimensional para o MEC. Além disso, elementos de contato foram incluídos na implementação, por meio de um método iterativo, para determinar as condições (abertura ou separação com aderência e atrito) dos mesmos.

2.5 CONTEXTUALIZAÇÃO

O presente trabalho apresenta a aplicação da técnica do MEC para meios isotrópicos e anisotrópicos visando a análise de estabilidade de túneis escavados em rocha com a inclusão das tensões iniciais. A formulação anisotrópica implementada neste trabalho é a clássica, conforme abordada por Cruse e Swedlow (1971).

Para a análise de estabilidade, adota-se o critério de Hoek-Brown (EBERHARDT, 2012) por ser mais abrangente quando comparado a outros métodos. Este critério compreende diversos parâmetros da rocha, além de uma variável que representa a perturbação subsuperficial devido ao fogo, que é representada por uma variação linear onde se limita a distância máxima para a ocorrência da ruptura num maciço rochoso. Além disso, um modelo probabilístico é incluído tendo em vista as incertezas inerentes aos parâmetros de entrada do modelo computacional. Para isso, utiliza-se o Método de Monte Carlo para avaliação das distribuições dos resultados das tensões críticas no maciço.

Para implementação das descontinuidades, faz-se um estudo de múltiplas sub-regiões em meio anisotrópico linear elástico, considerando mais de uma família de descontinuidades por meio da técnica de acoplamento dos contatos utilizando um processo iterativo. Além disso, é possível considerar passos de carga para avaliar as regiões de ruptura que, numa possível abertura, faz a diferença no cálculo da área de ruptura final.

3 FORMULAÇÃO DO MÉTODOS DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA MEIOS ELÁSTICOS

Neste capítulo, é apresentada a formulação bidimensional do Método de Elementos de Contorno, assim como a abordagem utilizada para discretização e consideração de tensões iniciais do maciço rochoso para elaboração do algoritmo. Também são apresentados os critérios de ruptura mais utilizados em mecânica das rochas para avaliação da estabilidade do maciço.

3.1 TEORIA DA ELASTICIDADE

A teoria da elasticidade trata do estudo sistemático das tensões, deformações e deslocamentos num corpo elástico submetido à influência de forças externas (CHOU; PAGANO, 1967). Nesta seção serão apresentadas as principais relações matemáticas necessárias para o desenvolvimento do Métodos dos Elementos de Contorno para os estados planos de tensão e deformação.

Para obtenção das equações diferenciais, sendo os deslocamentos as variáveis conhecidas, é necessário utilizar as três relações a seguir (BECKER, 1992):

1. Equilíbrio dos elementos diferenciais (equações diferenciais das tensões);
2. Lei de Hooke (relação tensão-deformação);
3. Definição das deformações (equações deformações-deslocamentos).

Admitindo uma área infinitesimal, as equações de equilíbrio podem ser escritas da seguinte forma:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

onde: b_i são as componentes da força de corpo e σ_{ij} são as componentes do tensor de tensões.

As relações entre deformações e deslocamentos, na hipótese de pequenos deslocamentos, são dadas por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2)$$

onde: ε_{ij} são as componentes do tensor de deformações infinitesimal.

Pela Lei de Hooke, as relações entre tensões e deformações, podem ser obtidas a partir de:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] & \varepsilon_{xy} &= \frac{1 + \nu}{E} \tau_{xy} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] & \varepsilon_{yz} &= \frac{1 + \nu}{E} \tau_{yz} \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1 + \nu}{E} \tau_{zx} \quad (3)$$

onde E é o módulo de Young e ν é o coeficiente de Poisson.

Alternativamente, as tensões podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_{xx} & \tau_{xy} &= 2\mu \varepsilon_{xy} \\ \sigma_{yy} &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_{yy} & \tau_{yz} &= 2\mu \varepsilon_{yz} \\ \sigma_{zz} &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_{zz} & \tau_{xz} &= 2\mu \varepsilon_{xz} \end{aligned} \quad (4)$$

onde λ é a constante de Lamé, μ é o módulo de cisalhamento e e é a deformação volumétrica definidos, respectivamente, por:

$$\lambda = \frac{2\nu\mu}{(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad e = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \quad (5)$$

Em notação indicial, a relação tensão deformação pode ser escrita por:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad \text{onde:} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (6)$$

onde δ_{ij} é o Delta de Kronecker.

Para o estado plano de tensões tem-se que:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= \frac{-\nu}{(1-\nu)} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \\ \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1 + \nu}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (7)$$

Já para o estado plano de deformações, segundo as leis de Hooke, sabe-se que:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left(\sigma_{xx} - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{yy} \right) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left(\sigma_{yy} - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{xx} \right) \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1 + \nu}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (8)$$

Além disso, para o estado plano de deformações, $\varepsilon_{zz} = 0$ e a tensão σ_{zz} é dada por:

$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (9)$$

3.2 TEOREMA DA RECIPROCIDADE DE BETTI

Para problemas de elastostática, a formulação do MEC pode ser derivada do teorema do trabalho recíproco de Betti para dois estados auto-equilibrados (u_i, t_i, b_i) e (u_i^*, t_i^*, b_i^*) (ALIABADI, 2002), onde: u_i são os deslocamentos; t_i as forças de superfície e b_i as forças de corpo.

Da equação de equilíbrio (1) é possível obter:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) u_i^* d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

sabendo que Ω representa o domínio e σ o tensor de tensões. A figura 2 ilustra um exemplo de região infinita com contorno Γ^* e domínio Ω^* que engloba uma região finita com contorno Γ e domínio Ω . Para um corpo bidimensional, as tensões, forças de corpo e deslocamentos são representados por funções de $\mathbf{X} \in \Omega$ [$\mathbf{X} \equiv x, y$].

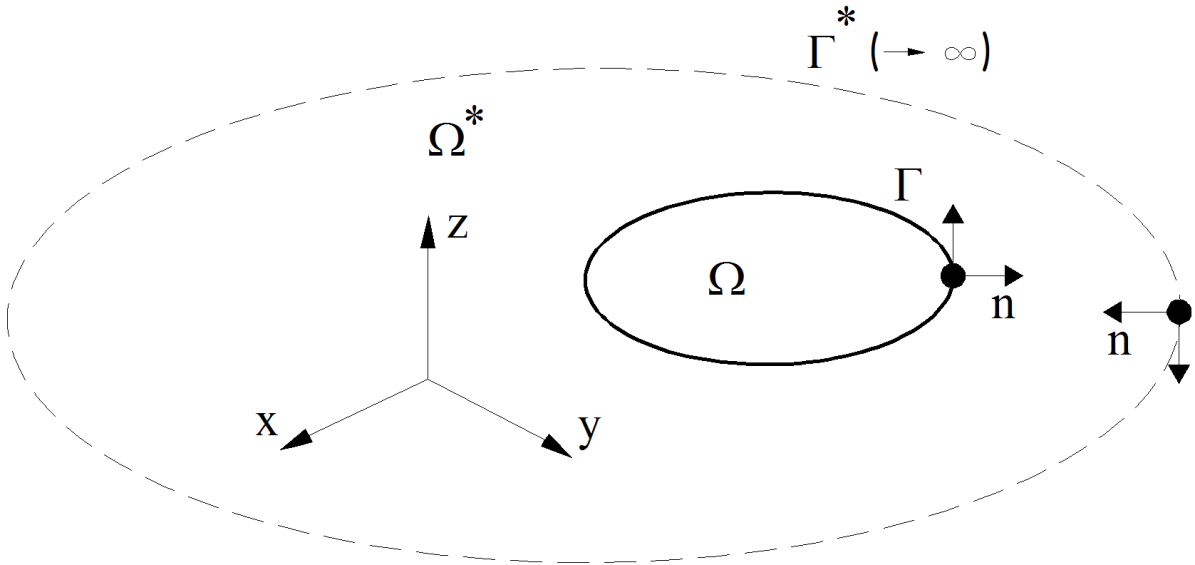


FIGURA 2 – REGIÃO COM DOMÍNIO Ω^* E CONTORNO Γ^* INFINITOS CONTENDO UM DOMÍNIO Ω E CONTORNO Γ FINITOS.

A primeira integral da equação (10) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} u_{i,j}^*)_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^*) d\Omega \quad (11)$$

Já que do cálculo tensorial tem-se que:

$$\sigma_{ij} u_{i,j}^* = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} u_{i,j}^* + \sigma_{ij} u_{j,i}^*) = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* \quad (12)$$

Aplicando o teorema da divergência na primeira integral à direita da equação (11) obtém-se:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij} u_{i,j}^*)_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j u_i^* d\Gamma = \int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma \quad (13)$$

Substituindo o termo obtido anteriormente na equação (11) tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega \quad (14)$$

Substituindo a equação (14) na equação (10) tem-se:

$$\int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega \quad (15)$$

Aplicando as equações constitutivas (6) da elasticidade, na integral da direita da equação (15), pode-se chegar em:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} [\lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}] \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (16)$$

Com isto, é possível obter a expressão que representa o teorema do trabalho recíproco de Betti:

$$\int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega \quad (17)$$

3.3 EQUAÇÕES INTEGRAIS DO CONTORNO

Para problemas da elastostática, as equação integrais do contorno podem ser derivadas do teorema de Betti (equação (17)), considerando que as forças de corpo b_i^* correspondem a forças pontuais num meio infinito, representadas pela função Delta de Dirac como mostrado a seguir:

$$b_i^* = \Delta (\mathbf{X} - \mathbf{X}') e_i \quad (18)$$

onde e_i corresponde a uma força unitária positiva na direção i aplicada no ponto fonte \mathbf{X}' . Para problemas bidimensionais e_i é uma força por unidade de espessura.

As forças de superfície e os deslocamentos que correspondem à solução particular de uma força pontual são escritos conforme as equações (19) e (20), respectivamente:

$$t_i^* = T_{ij} (\mathbf{X}, \mathbf{X}') e_j \quad (19)$$

$$u_i^* = U_{ij} (\mathbf{X}, \mathbf{X}') e_j \quad (20)$$

Substituindo as soluções acima na equação (17) resulta na equação (21) também denominada identidade de Somigliana para os deslocamentos, onde $\mathbf{x} \in \Gamma$. Ela relaciona os valores dos deslocamentos num ponto interno \mathbf{X}' pertencente ao domínio Ω com os valores dos deslocamentos e forças de superfície do contorno Γ .

$$u_i(\mathbf{X}') = \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ij}(\mathbf{X}', \mathbf{X}) b_j(\mathbf{X}) d\Omega \quad (21)$$

Na forma matricial, a equação (21) é dada por:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} d\Gamma + \\ + \int_{\Omega} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} d\Omega \quad (22)$$

As deformações podem ser obtidas por meio da derivada dos deslocamentos (equação (21)) em relação ao ponto fonte \mathbf{X}' conforme equação abaixo:

$$u_{i,k}(\mathbf{X}') = \int_{\Gamma} U_{ij,k}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij,k}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma + \\ + \int_{\Omega} U_{ij,k}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) b_j(\mathbf{x}) d\Omega \quad (23)$$

A obtenção das tensões no domínio por meio da identidade de Somigliana e pela lei de Hooke é dada por:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{X}') = \int_{\Gamma} D_{kij}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) t_k(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) d\Gamma + \\ + \int_{\Omega} D_{kij}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) b_k(\mathbf{x}) d\Omega \quad (24)$$

onde D_{kij} e S_{kij} são obtidas através de $U_{ij,k}$ e $T_{ij,k}$, respectivamente, com a utilização da Lei de Hooke e serão apresentadas adiante (equações (30) e (31)).

3.4 SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

No método dos elementos de contorno é imprescindível a existência das soluções para forças pontuais. Por exemplo, para uma força aplicada no ponto fonte \mathbf{X}' , a equação de Navier pode ser reescrita como:

$$\mu u_{i,jj}^* + \frac{\mu}{1-2\nu} u_{j,ji}^* + \Delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}') e_i = 0 \quad (25)$$

As soluções devidas a uma força pontual incluídas nas equações governantes são denominadas de "soluções fundamentais". Há várias formas de se obter estas soluções, sendo que a mais comum baseia-se na utilização do vetor de Galerkin (ALIABADI, 2002). Entretanto, métodos alternativos baseados em funções complexas de tensões também podem ser eficientes. Num meio infinito, a solução para força pontual pode ser derivada a partir da solução fundamental de Kelvin para o caso do estado plano de deformação (KANE, 1994).

Para problemas bidimensionais, a solução fundamental para os deslocamentos é dada pela equação (26) enquanto que para as forças de superfície tem-se a equação (27):

$$U_{ij}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right\} \quad (26)$$

$$T_{ij}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] \right\} + \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} [(1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i)] \quad (27)$$

sendo:

$U_{ij}(\mathbf{X}', \mathbf{x})$: o deslocamento na direção j no ponto \mathbf{x} devido a uma força unitária pontual atuante na direção i do ponto fonte \mathbf{X}' ;

$T_{ij}(\mathbf{X}', \mathbf{x})$: a força de superfície na direção j no ponto \mathbf{x} devido a uma força unitária pontual atuante na direção i do ponto fonte \mathbf{X}' ;

ν : o coeficiente de Poisson;

μ : o módulo de cisalhamento;

δ_{ij} : o delta de Kronecker;

r : a distância do ponto \mathbf{x} ao ponto fonte \mathbf{X}' ;

\mathbf{n} : o vetor normal do contorno.

As soluções fundamentais para as deformações e tensões (equações (23) e (24)) podem ser obtidas das derivadas das equações (26) e (27) em relação a \mathbf{X}' , apresentadas abaixo:

$$U_{ij,k}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) = -\frac{1+\nu}{4\pi(1-\nu)Er} \{ (3-4\nu)\delta_{ij}r_{,k} - \delta_{jk}r_{,i} - \delta_{ik}r_{,j} + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \} \quad (28)$$

$$T_{ij,k}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2\frac{\partial r}{\partial n} [\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i} - r_{,k}((1-2\nu)\delta_{ij} + 4r_{,i}r_{,j})] \right. \\ \left. + n_k [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] - n_j (1-2\nu)[\delta_{ik} - 2r_{,i}r_{,k}] \right. \\ \left. + n_i (1-2\nu)[\delta_{jk} - 2r_{,j}r_{,k}] \right\} \quad (29)$$

Substituindo (28) e (29) na lei de Hooke,

$$D_{kij}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{ (1-2\nu)(-r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ki} + r_{,i}\delta_{jk}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \} \quad (30)$$

$$S_{kij}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \begin{aligned} & 2\frac{\partial r}{\partial n} \left[\begin{aligned} & (1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(r_{,j}\delta_{ik} + r_{,i}\delta_{jk}) \\ & -4r_{,i}r_{,j}r_{,k} \end{aligned} \right] \\ & + 2\nu(n_i r_{,j}r_{,k} + n_j r_{,i}r_{,k}) + \\ & (1-2\nu)(2n_k r_{,i}r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) \\ & - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

A solução fundamental para o estado plano de tensão pode ser obtida pela introdução do coeficiente de Poisson ν' e do Módulo de Young E' , definidos como:

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \nu} \quad e \quad E' = E \left[1 - \left(\frac{\nu}{1 + \nu} \right)^2 \right] \quad (32)$$

3.5 EQUAÇÃO PARA DESLOCAMENTO NO CONTORNO

A equação (21) apresentada anteriormente é válida para qualquer ponto fonte dentro do domínio Ω . Para obtenção da solução nos pontos do contorno é necessário aplicar o limite $\mathbf{X}' \rightarrow \mathbf{x}'$, sendo $\mathbf{x}' \in \Gamma$.

A figura 3 ilustra um problema cujo domínio tenha sido aumentado ao redor do ponto fonte \mathbf{x}' por uma região semi-circular, de raio ϵ e centro \mathbf{x}' cujo contorno é expresso por Γ_ϵ^+ .

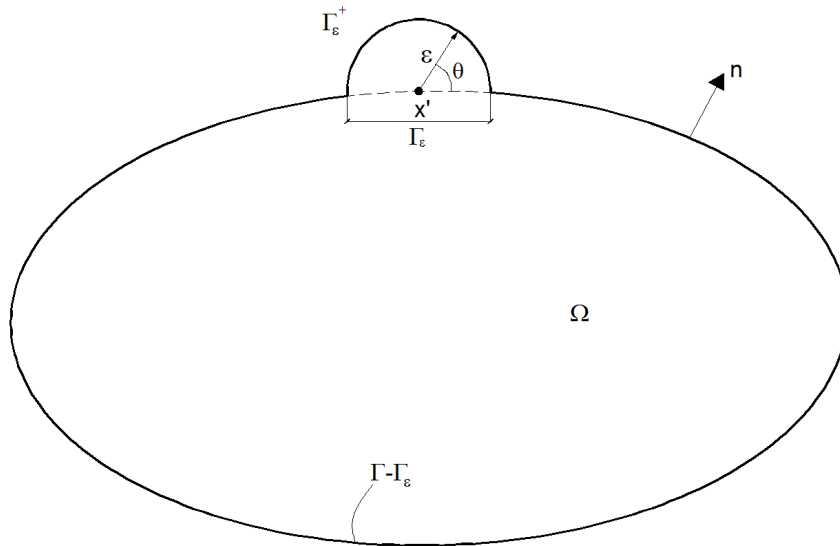


FIGURA 3 – PONTO FONTE \mathbf{x}' SITUADO NO CONTORNO CIRCUNDADO POR UM ARCO SEMI-CIRCULAR.

O contorno aumentado Γ^A pode ser representado pela expressão (33):

$$\Gamma^A = (\Gamma - \Gamma_\epsilon) + \Gamma_\epsilon^+ \quad (33)$$

sabendo-se que Γ_ϵ é a parte do contorno que foi removida. Para estudar o comportamento das singularidades é possível aplicar o limite quando $\epsilon \rightarrow 0$ e, portanto, $\Gamma^A \rightarrow \Gamma$.

Ao aplicar o limite quando $\epsilon \rightarrow 0$ para a primeira integral do lado direito da equação (21), tem-se que:

$$\int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Gamma_\epsilon^+} U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma \right\} \quad (34)$$

A segunda integral do lado direito da equação (34) contém integrandos singulares da ordem de $O(\ln 1/r)$ para problemas bidimensionais; porém, é possível mostrar que a integral

tende a zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Já a primeira integral do lado direito da equação (34) é considerada uma integral imprópria e por isso é necessário analisar cuidadosamente sua integração numérica.

Aplicando o limite à segunda integral do lado direito da equação (21) obtém-se:

$$\int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma \right\} \quad (35)$$

No lado direito da equação (35) há integrandos singulares da ordem de $O(r^{-1})$. A primeira integral é determinada pelo valor principal de Cauchy. Já a segunda integral é regularizada por meio do primeiro termo da expansão em série de Taylor dos deslocamentos sobre o ponto fonte, resultando na equação (36):

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) [u_j(\mathbf{x}) - u_j(\mathbf{x}')] d\Gamma \right\} + \\ &+ u_j(\mathbf{x}') \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (36)$$

A primeira integral do lado direito da equação (36) deve ser nula, pois obedece à condição de continuidade dos deslocamentos. Entretanto, a segunda integral gera um termo nos deslocamentos como o representado a seguir:

$$u_j(\mathbf{x}') \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) d\Gamma = \alpha_{ij}(\mathbf{x}') u_j(\mathbf{x}') \quad (37)$$

Assim, a equação (35) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma = \oint_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma + \alpha_{ij}(\mathbf{x}') u_j(\mathbf{x}') \quad (38)$$

onde \oint representa a integral em termos do valor principal de Cauchy. Portanto, a equação integral do contorno pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} C_{ij}(\mathbf{x}') u_j(\mathbf{x}') + \oint_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma &= \oint_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma \\ &+ \oint_{\Omega} U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{X}) b_j(\mathbf{X}) d\Omega \end{aligned} \quad (39)$$

onde o termo livre é expresso por $C_{ij}(\mathbf{x}') = \delta_{ij}(\mathbf{x}') + \alpha_{ij}(\mathbf{x}')$. Considere-se um contorno suave, como o ilustrado na figura 3, e admita-se que \mathbf{r} seja a distância entre o ponto fonte \mathbf{x}' e um ponto \mathbf{x} no contorno Γ_{ε}^+ . Ao utilizar o sistema de coordenadas polares, tem-se que:

$$\mathbf{r} = \varepsilon \cos \theta \mathbf{i} + \varepsilon \sin \theta \mathbf{j} \quad d\Gamma_{\varepsilon}^+ = \varepsilon d\theta$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon} = 1$$

Obs: $\mathbf{r} = \varepsilon \mathbf{n}$ onde \mathbf{n} possui a mesma direção de \mathbf{r}

$$r_{,1} = \cos \theta \quad r_{,2} = \sin \theta$$

A partir dessas relações é possível obter as constantes α_{ij} , para um contorno suave, ou seja, $\theta = 180^\circ$. Então:

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = -1/2 \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$$

3.6 REGIÕES INFINITAS

Um dos atributos distintos do MEC é a concordância natural às condições de contorno para regiões infinitas, evitando a necessidade de aproximação numérica do contorno infinito. Considerando uma cavidade com contorno Γ e normal \mathbf{n} num meio infinito, conforme ilustra a figura 4, por meio de um processo limite, obtém-se a equação (40):

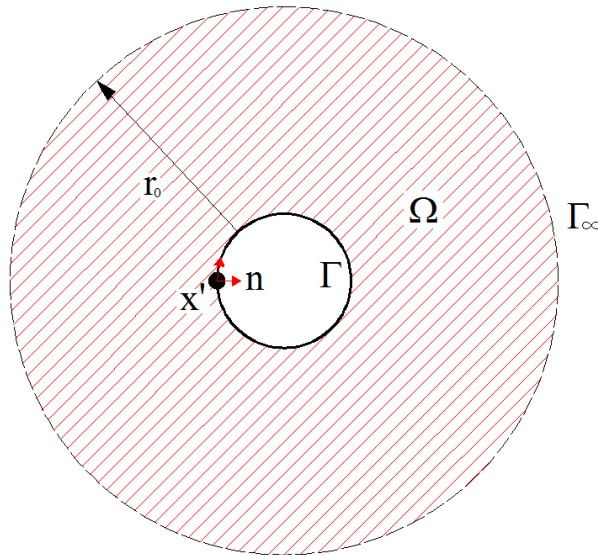


FIGURA 4 – ESQUEMA DO DOMÍNIO INFINITO COM UMA CAVIDADE E VETOR NORMAL.

$$\begin{aligned} & C_{ij}(\mathbf{x}') u_j(\mathbf{x}') + \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Gamma_{\infty}} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma_{\infty} \\ &= \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Gamma_{\infty}} U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma_{\infty} \end{aligned} \quad (40)$$

onde $\mathbf{x}' \in \Gamma$. Quando $r_0 \rightarrow \infty$, portanto, a equação acima pode ser expressa por:

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{\infty}} [T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) - U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x})] d\Gamma_{\infty} = 0 \quad (41)$$

Para problemas bidimensionais, as soluções fundamentais para os deslocamentos apresentam termos $\ln r$ e, para as forças de superfície, $1/r$. As condições de regularidade para o infinito implicam U_{ij} com termo $\ln r_0$ e T_{ij} com termo $1/r_0$. Portanto, as duas parcelas da integral ((41)) não se aproximam de zero, porém se cancelam quando $r_0 \rightarrow \infty$.

3.7 DISCRETIZAÇÃO NUMÉRICA

Conforme Aliabadi (2002), o método dos elementos de contorno é um método numérico para solução das equações integrais do contorno baseado em discretizações numéricas. No presente trabalho foram utilizadas funções de interpolação constantes e lineares, que serão apresentados na sequência.

3.7.1 Elementos Constantes

No caso de elementos constantes, a geometria é dividida em Ne elementos e admite-se que os valores de u_j e t_j são constantes e iguais aos valores na metade do elemento, conforme ilustra a figura 5.

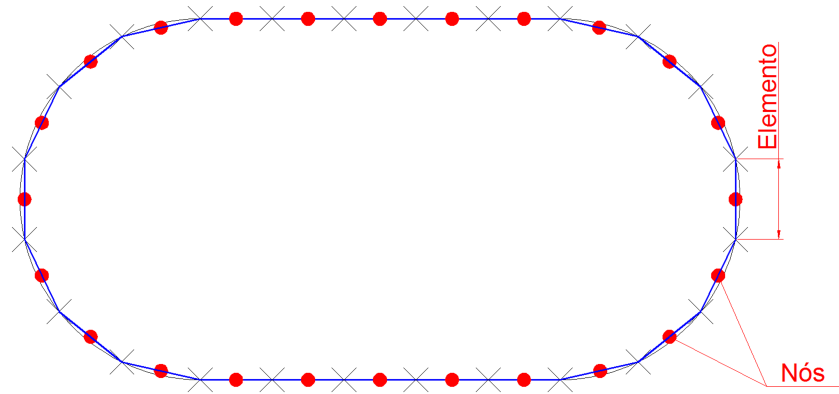


FIGURA 5 – MODELO COM DISCRETIZAÇÃO UTILIZANDO A FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO CONSTANTE.

A equação do MEC considerando funções de interpolação constantes pode ser escrita da seguinte forma:

$$C_{ij}(\mathbf{x}^c) u_j(\mathbf{x}^c) + \sum_{n=1}^{Ne} u_j^c \int_{\Gamma_n} T_{ij}(\mathbf{x}^c, \mathbf{x}) d\Gamma_n = \sum_{n=1}^{Ne} t_j^c \int_{\Gamma_n} U_{ij}(\mathbf{x}^c, \mathbf{x}) d\Gamma_n \quad (42)$$

onde u_j^c e t_j^c são os deslocamentos e forças de superfície dos pontos nodais no centro do elemento. O ponto fonte é representado por \mathbf{x}^c , Ne é o número de parâmetros desconhecidos do contorno (deslocamentos e forças de superfície) e $C_{ij}(x') = 0,5\delta_{ij}$ é o termo livre.

3.7.2 Elementos Isoparamétricos Lineares

Para este tipo de formulação os deslocamentos e as forças de superfície atuantes são aproximados usando funções de interpolação lineares. Desta forma, as integrais são mais difíceis de serem avaliadas, pois x_j , u_j e t_j variam linearmente de acordo com a equação (43) sobre o elemento, como ilustra a figura 6 (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984):

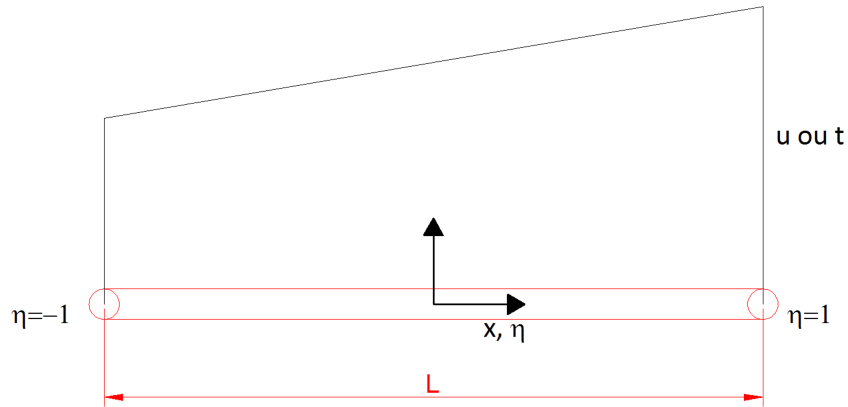


FIGURA 6 – ELEMENTO COM FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO LINEAR.

$$\begin{aligned} x_j &= \sum_{\alpha=1}^2 N_{\alpha}(\eta) x_j^{\alpha} \\ u_j &= \sum_{\alpha=1}^2 N_{\alpha}(\eta) u_j^{\alpha} \\ t_j &= \sum_{\alpha=1}^2 N_{\alpha}(\eta) t_j^{\alpha} \end{aligned} \quad (43)$$

onde N_{α} são as funções de interpolação definidas por polinômios de grau 1 e têm a propriedade de serem iguais a 1 nos nós α e zero nos outros nós. Estas funções são definidas em termos de coordenadas adimensionais η ($-1 \leq \eta \leq 1$) (figura 6).

A figura 7 ilustra a forma de discretização quando se utilizam funções de interpolação lineares.

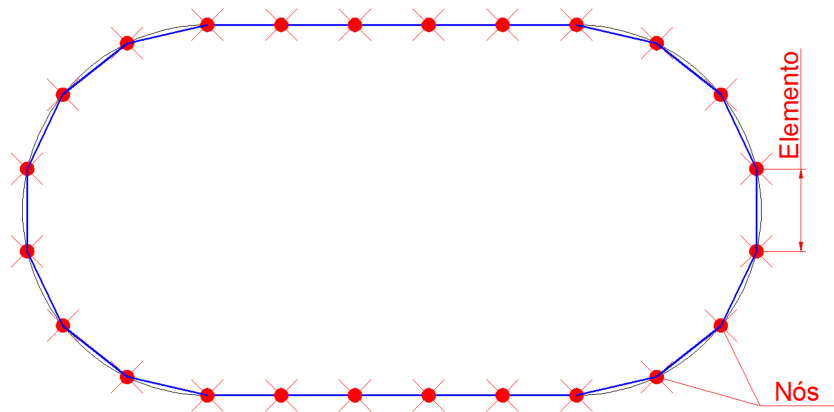


FIGURA 7 – MODELO DISCRETIZADO COM FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO LINEARES.

Para a discretização com elementos lineares ($m = 2$) as funções de interpolação são apresentadas em (44):

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \eta) \quad N_2 = \frac{1}{2}(1 + \eta) \quad (44)$$

A equação discretizada do contorno para elemento isoparamétrico linear é dada pela equação (45):

$$C_{ij}(\mathbf{x}') u_j(\mathbf{x}') + \sum_{n=1}^{Ne} \sum_{\alpha=1}^2 P_{ij}^{n\alpha} u_j^{n\alpha} = \sum_{n=1}^{Ne} \sum_{\alpha=1}^2 Q_{ij}^{n\alpha} t_j^{n\alpha} \quad i, j = 1, 2 \quad (45)$$

Os coeficientes $P_{ij}^{n\alpha}$ e $Q_{ij}^{n\alpha}$ são definidos em função das integrais de Γ_n , onde $d\Gamma_n(x)$ é substituído por $J^n(\eta) d\eta$, tal que:

$$\begin{aligned} P_{ij}^{n\alpha} &= \int_{-1}^1 N_\alpha(\eta) T_{ij}[\mathbf{x}', \mathbf{x}(\eta)] J^n(\eta) d\eta \\ Q_{ij}^{n\alpha} &= \int_{-1}^1 N_\alpha(\eta) U_{ij}[\mathbf{x}', \mathbf{x}(\eta)] J^n(\eta) d\eta \end{aligned} \quad (46)$$

onde o Jacobiano da transformada é definido por:

$$J(\eta) = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\eta}\right)^2} = \sqrt{\left(\sum_{\alpha=1}^2 \frac{dN_\alpha}{d\eta} x_1^{n\alpha}\right)^2 + \left(\sum_{\alpha=1}^2 \frac{dN_\alpha}{d\eta} x_2^{n\alpha}\right)^2} \quad (47)$$

3.8 TENSÕES INICIAIS NO DOMÍNIO

Diversos problemas que possuem tensões ou deformações iniciais precisam diferenciar as variáveis em componentes elásticas, iniciais e complementares (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992). Se houver um estado de tensões iniciais existente, as tensões elásticas são dadas por:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^c + \sigma_{ij}^0 \quad (48)$$

onde: σ_{ij}^c representa a tensão complementar e σ_{ij}^0 a tensão inicial.

Neste trabalho, as tensões iniciais, também conhecidas como *in situ*, são introduzidas no modelo por meio de uma combinação de dois casos de carregamentos (TELLES; CASTOR; GUIMARÃES, 1995), conforme ilustra a figura 8, evitando assim a necessidade de considerar integrais de domínio.

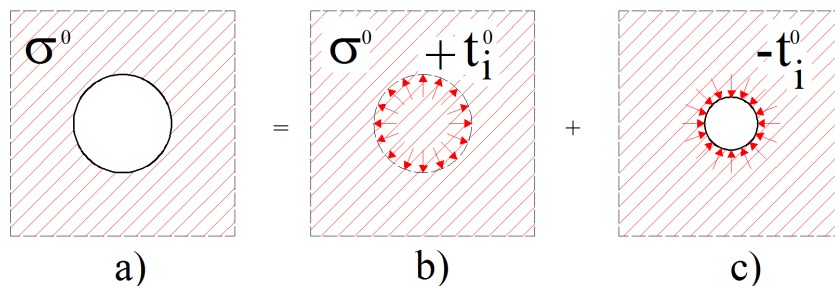


FIGURA 8 – REPRESENTAÇÃO FÍSICA DAS TENSÕES INICIAIS EM UM DOMÍNIO COM CAVIDADE SUBSTITUÍDO PELA COMBINAÇÃO DE DOIS ESTUDOS COMPLEMENTARES.

Conhecido o tensor σ^0 , obtém-se o vetor t_i das forças de superfície, que com sinal trocado são as condições de contorno do problema definido na figura 8 - c, o qual é dado por:

$$\begin{aligned} t_x^0 &= -(\sigma_{xx}^0 n_1 + \tau_{xy}^0 n_2) \\ t_y^0 &= -(\tau_{xy}^0 n_1 + \sigma_{yy}^0 n_2) \end{aligned} \quad (49)$$

onde: $\sigma_{xx}^0, \tau_{xy}^0, \sigma_{yy}^0$ são as tensões iniciais já transformadas para os eixos x e y; n_1, n_2 são as componentes do vetor normal à superfície para cada elemento; t_x^0, t_y^0 são as componentes das forças de superfície.

A solução deste problema deve ser superposta com as tensões iniciais para obter o campo de tensões e deformações desejado, definido na figura 8 - a.

3.9 CRITÉRIOS DE RUPTURA APLICADOS A MACIÇOS ROCHOSOS

Para análise de ruptura em rochas, onde a compressão é adotada com sinal positivo, alguns critérios mais empregados são:

- Critério de Rankine, ou seja, o critério da mínima (σ_3) tensão normal se a compressão for positiva;
- Critério de Tresca, também conhecido como critério da máxima tensão de cisalhamento;
- Critério de Mohr-Coulomb;
- Critério de Hoek-Brown.

Os critérios mais utilizados para análise de maciços rochosos e que serão descritos na sequência são: Mohr-Coulomb e Hoek-Brown.

3.9.1 Critério de Ruptura de Mohr-Coulomb

É o mais simples e mais conhecido critério de falha empregado em rochas, cujo objetivo é representar a variação das tensões de pico σ_1 com a pressão confinante σ_3 (GOODMAN, 1989). A teoria consiste numa envoltória linear que tangencia os círculos de Mohr, representando as combinações críticas das tensões principais, conforme ilustra a figura 9. A equação (50) descreve a reta tangente de ruptura onde τ é a tensão cisalhante que provoca a ruptura, c é a coesão do material, σ_n é a tensão normal sobre o plano que rompe e ϕ é o ângulo de atrito:

$$\tau = c + \sigma_n \tan \phi \quad (50)$$

A interpretação física da equação (50) é que a fratura ocorre quando se reduz a tensão cisalhante da resistência de atrito associada à tensão normal, sobre o plano de ruptura, resultando na coesão da rocha.

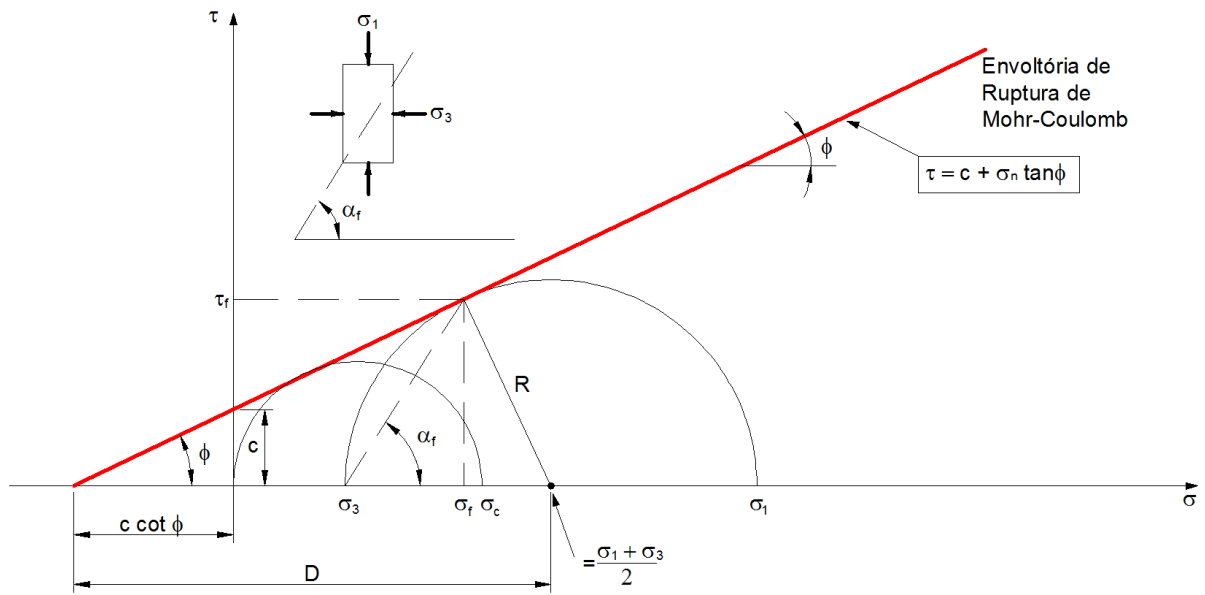


FIGURA 9 – CRITÉRIO DE RUPTURA DE MOHR-COULOMB.

Outro fator importante a se destacar neste critério é que ele pode ser usado para a representação da resistência residual ao esforço do material após um pico de deformação. Para isto, os parâmetros referentes ao cisalhamento residual são identificados com o subscrito r: a coesão c_r pode aproximar-se de zero; porém, o ângulo de atrito ϕ_r pode variar no intervalo de zero a ϕ .

Considerando as tensões principais nas condições de pico, pode-se reescrever o critério de Mohr-Coulomb por meio da equação:

$$\sigma_1 = \sigma_c + \sigma_3 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi}{2} \right) \quad (51)$$

onde σ_1 representa a tensão principal maior, correspondente ao pico da curva tensão-deformação, e σ_c é a resistência de compressão uniaxial da rocha dada pela equação (52).

$$\sigma_c = 2 c \tan \left(45^\circ + \frac{\phi}{2} \right) \quad (52)$$

3.9.2 Critério de Ruptura de Hoek-Brown

O critério de falha de Hoek-Brown descreve o aumento não linear na resistência de pico de uma rocha com o aumento da tensão confinante. O que diferencia este método do método de Mohr-Coulomb é a envoltória de ruptura que, para Hoek-Brown é representada por uma parábola, conforme o gráfico da figura 10, retirado de Eberhardt (2012).

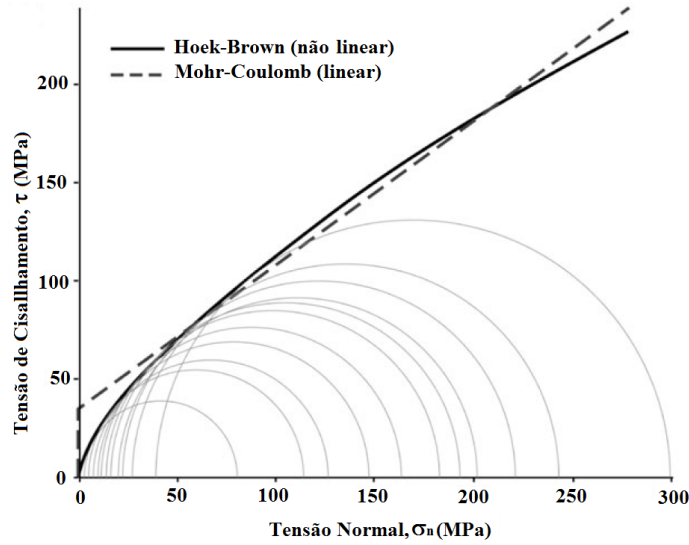


FIGURA 10 – COMPARAÇÃO ENTRE AS ENVOLTÓRIAS LINEAR DE MOHR-COULOMB E NÃO-LINEAR DE HOEK-BROWN. (ADAPTADO DE (EBERHARDT, 2012))

A equação (53) representa a formulação geral para o Critério de Hoek-Brown Generalizado utilizado para maciços rochosos com muitas descontinuidades:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_c \left(m_b \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^a \quad (53)$$

onde:

σ_c : é a resistência à compressão uniaxial da rocha intacta;

σ_1 e σ_3 : são as tensões principais maior e menor, respectivamente.

m_b : constante m para maciços rochosos fraturados;

s, a : são as constantes dependentes das características do maciço rochoso;

Para a rocha intacta, onde o critério de Hoek-Brown é reconhecido como o limite superior da resistência de um maciço rochoso, tem-se que $a=0,5$ e $m_b = m_i$, sendo m_i a constante m da rocha intacta, resultando na seguinte expressão:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_{ci} \sqrt{m_i \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} + s} \quad (54)$$

O termo a , que representa o expoente, foi inserido na equação (53) para modelar melhor os maciços rochosos de má qualidade, além de permitir o ajuste da envoltória de ruptura. Conforme apresentado em Eberhardt (2012), o índice GSI (*Geological Strength Index*) foi introduzido nas relações para m_b, s e a com o objetivo de incluir as descontinuidades presentes no maciço rochoso. Além disso, estas relações foram reavaliadas, na última atualização do critério de Hoek Brown, com a inserção do fator D_f (dano) para incluir as perturbações devidas

ao "fogo"¹. Este fator é utilizado em projetos, quando se tem a desconfiança do que pode acontecer com a qualidade da rocha após uma escavação realizada por meio de explosivo. Para o caso de uma tuneladora, o fator de dano não induz a rocha remanescente a nenhuma fratura nova. Com isto, tem-se as seguintes relações:

$$s = \exp\left(\frac{GSI - 100}{9 - 3D_f}\right) \quad a = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(e^{-\frac{GSI}{15}} + e^{-\frac{20}{3}}\right) \quad (55)$$

$$m_b = m_i \exp\left(\frac{GSI - 100}{28 - 14D_f}\right) \quad (56)$$

onde parâmetros m_b , s e a são ajustados de acordo com os valores GSI , como apresentado na figura 11.

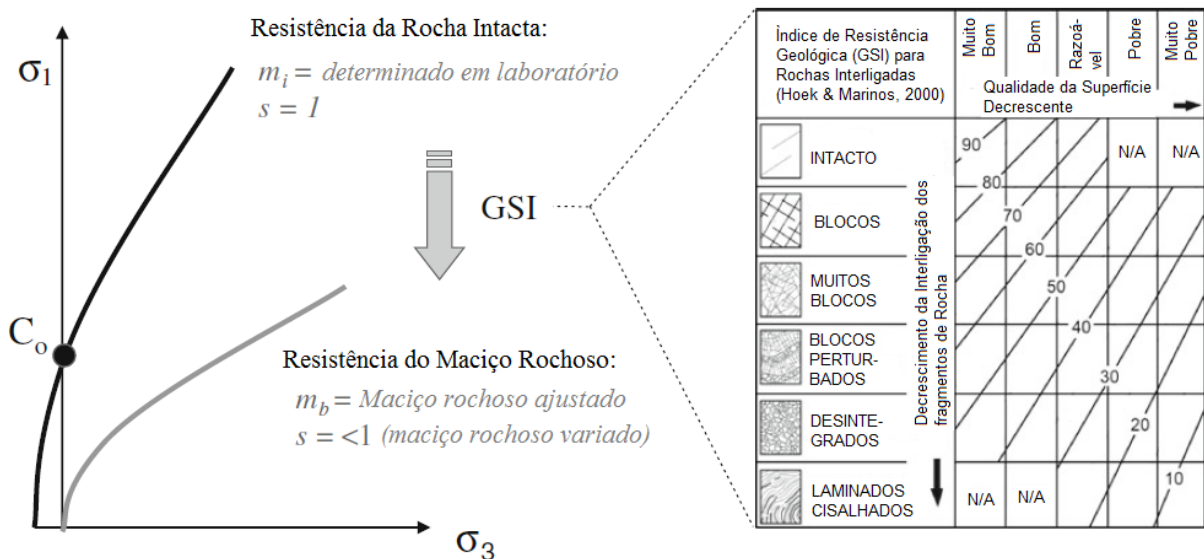


FIGURA 11 – RELAÇÃO ENTRE O CRITÉRIO DE HOEK-BROWN DA ROCHA INTACTA E A RESISTÊNCIA DO MACIÇO ROCHOSO AJUSTADO. (ADAPTADO DE (EBERHARDT, 2012))

O critério de ruptura de Hoek-Brown pode ser aplicado se as condições do maciço rochoso estiverem dentro da menor e das duas maiores escalas, apresentadas na figura 12 (HOEK; KAISER; BAWDEN, 1995) por círculos que identificam o grau de fraturamento do maciço. Além disso, este critério pode ser aplicado para rocha intacta ou maciços altamente fraturados nos quais é possível adotar um modelo homogêneo e isotrópico para as análises. Quando o maciço rochoso possui duas famílias de descontinuidades, ao se utilizar este critério, deve-se valer de extrema cautela.

¹ Por fogo entende-se atividades de detonação por explosivo.

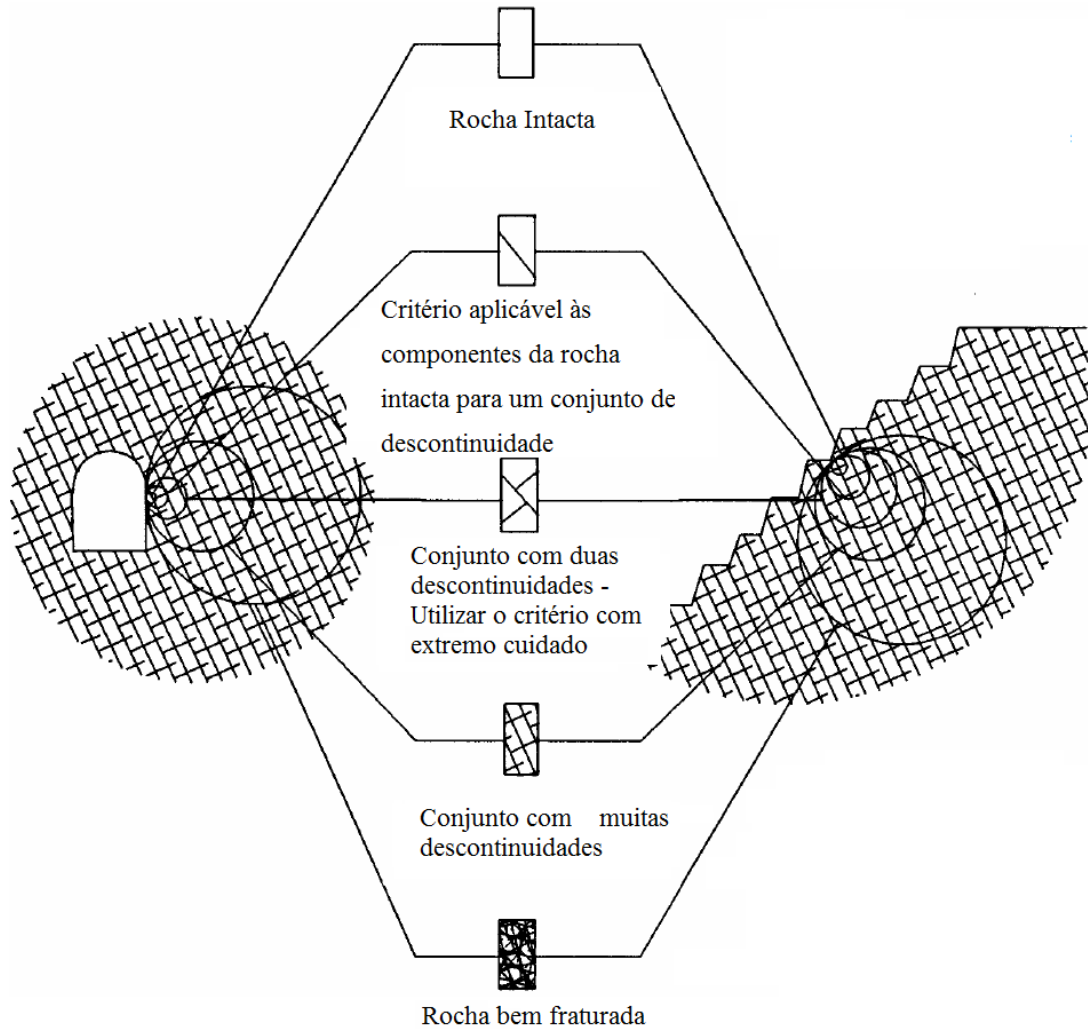


FIGURA 12 – CONDIÇÕES EM QUE O CRITÉRIO DE HOEK-BROWN PODE SER APLICADO.
(ADAPTADO DE (HOEK; KAISER; BAWDEN, 1995))

Para a variação do parâmetro de dano D_f , neste trabalho, é proposta a seguinte equação:

$$D_f = D_{\max} \left(1.0 - \frac{dist_P}{dist_D} \right) \quad \text{para } dist_P \leq dist_D \quad (57)$$

$$D_f = 0 \quad \text{para } dist_P > dist_D$$

onde: D_{\max} é o dano máximo ao qual o maciço está sujeito; $dist_P$ é a distância do ponto no domínio até o ponto mais próximo da cavidade; e $dist_D$ representa a extensão máxima da região perturbada (danificada).

A figura 13 apresenta a variação de dano em relação à distância máxima da região perturbada adotada neste trabalho.

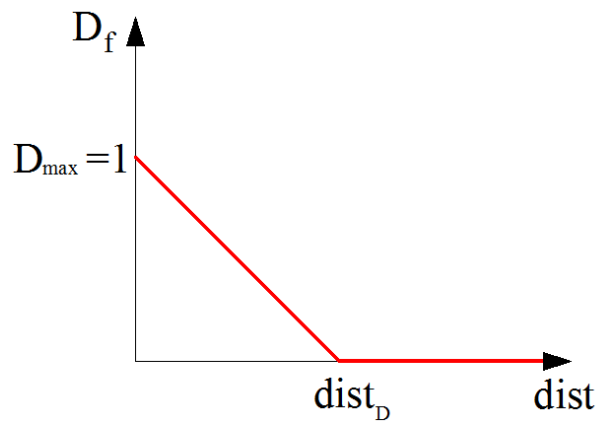


FIGURA 13 – GRÁFICO DA VARIAÇÃO DO DANO EM RELAÇÃO À DISTÂNCIA MÁXIMA DA REGIÃO PERTURBADA.

3.10 VALIDAÇÃO DO ALGORITMO ISOTRÓPICO PARA AS TENSÕES INICIAIS

O modelo empregado para validação das implementações efetuadas e avaliação da influência dos parâmetros de entrada, em especial, das tensões iniciais no domínio, é definido por uma cavidade circular de raio a em meio infinito, isotrópico e elástico-linear em estado plano de deformações sob um estado de tensão inicial $\sigma_x^0 = \sigma_y^0 = \sigma^0$.

A figura 14 ilustra o modelo citado, cujas soluções analíticas para uma condição de pressão interna constante é dada por (58).

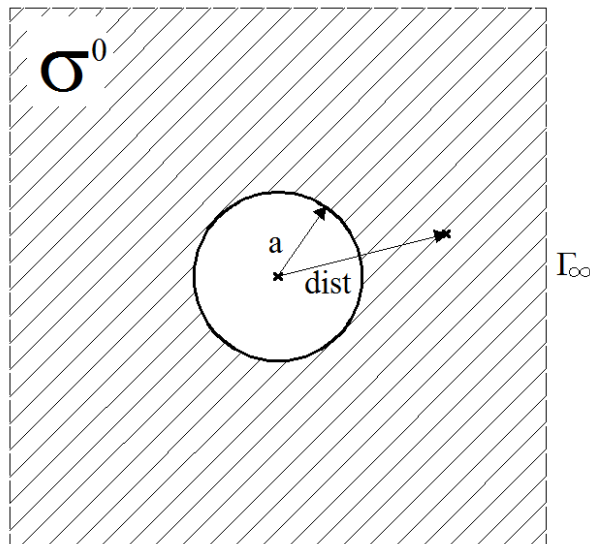


FIGURA 14 – CAVIDADE CIRCULAR EM MEIO INFINITO SUBMETIDA A UM ESTADO DE TENSÕES INICIAIS.

$$\sigma_r = \sigma^0 - \frac{\sigma^0 a^2}{dist^2} + \frac{pa^2}{dist^2}$$

$$\sigma_\theta = \sigma^0 + \frac{\sigma^0 a^2}{dist^2} - \frac{pa^2}{dist^2} \quad (58)$$

onde σ_r é tensão radial, σ_θ é a tensão tangencial, σ^0 é a tensão inicial do modelo, p representa a força de superfície uniforme aplicada em todo o contorno da cavidade, $dist$ é a distância do centro da cavidade até o ponto no domínio, e a o raio.

O código para análise da estabilidade em túneis foi elaborado em Fortran 95 e validado comparando-se os resultados com os resultados fornecidos pelo Examine 2D (ROCSCIENCE, 2008) que é um software de elementos de contorno. Para validação dos resultados foram utilizados os valores indicados na tabela 1.

TABELA 1 – DADOS PARA ANÁLISE DO PROBLEMA.

E (MPa)	Poisson	σ^0 (MPa)	a (m)
4600,00	0,25	-100,00	3,00

Por meio da solução analítica do problema, foi possível calcular o erro relativo percentual para comparação dos resultados. O gráfico da figura 15 apresenta os resultados obtidos com o Examine 2D, considerando elementos constantes, e com o algoritmo elaborado para tensões radiais em função da distância ao centro da cavidade.

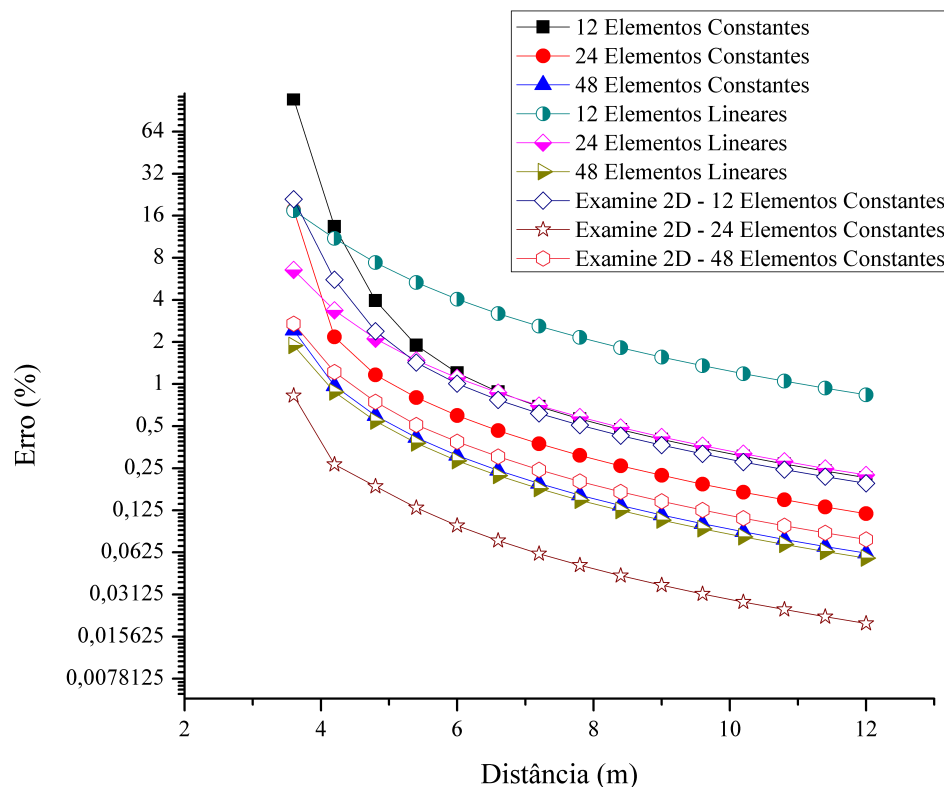


FIGURA 15 – GRÁFICO DAS TENSÕES RADIAIS – ERRO (%) x DISTÂNCIA (M).

A figura 16 apresenta os resultados obtidos com o Examine 2D e com o algoritmo elaborado para as tensões angulares em função da distância ao centro da cavidade.

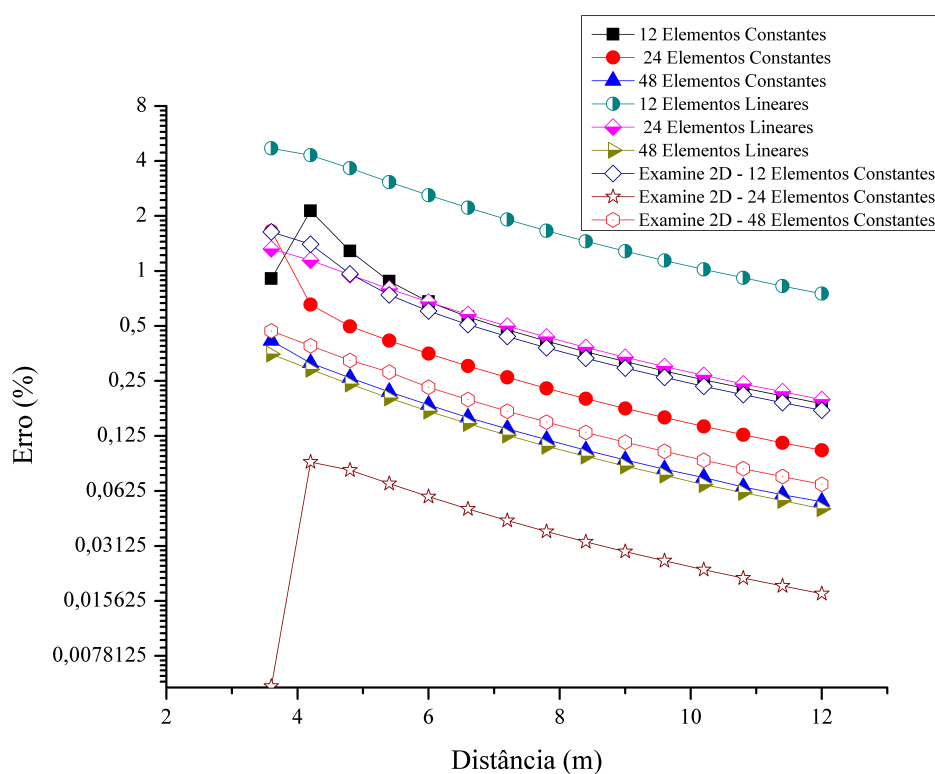


FIGURA 16 – GRÁFICO DAS TENSÕES TANGENCIAIS – ERRO (%) × DISTÂNCIA (M).

Conclui-se a partir dos gráficos que, tanto para os elementos constantes quanto para os lineares, à medida que se aumenta o número de elementos no contorno, os resultados convergem para a solução analítica. Os resultados são semelhantes aos resultados do Examine 2D, entretanto, com convergência mais consistente à medida que a discretização aumenta.

4 FORMULAÇÃO DO MEC PARA MEIOS ANISOTRÓPICOS

O presente capítulo visa apresentar a formulação do método dos elementos de contorno para problemas bidimensionais, sob estado plano de tensões, para materiais anisotrópicos.

Da teoria da elasticidade (TIMOSHENKO; GOODIER, 1968) as equações de equilíbrio para as tensões, desprezando o peso próprio, são dadas por:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (59)$$

Conforme Aliabadi (2002), as equações de equilíbrio e compatibilidade são independentes do tipo de material enquanto que a relação tensão-deformação depende especificamente do comportamento do material. Para casos bidimensionais, a lei constitutiva que representa um material anisotrópico no estado plano de tensões é representada pela seguinte relação:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{16} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{26} \\ \beta_{61} & \beta_{62} & \beta_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (60)$$

em que as constantes do material são definidas por:

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= 1/E_1 & \beta_{12} &= -\nu_{12}/E_1 & \beta_{16} &= \eta_{12,1}/E_1 \\ \beta_{21} &= -\nu_{21}/E_2 & \beta_{22} &= 1/E_2 & \beta_{26} &= \eta_{12,2}/E_2 \\ \beta_{61} &= \eta_{1,12}/\mu_{12} & \beta_{62} &= \eta_{2,12}/\mu_{12} & \beta_{66} &= 1/\mu_{12} \end{aligned}$$

onde E_k é o módulo de Young referente ao eixo x_k , μ_{12} é o módulo de cisalhamento, ν_{ij} é o coeficiente de Poisson, β_{ij} é a matriz de compliância e $\eta_{i,jk}$ coeficientes mútuos de primeiro e segundo gêneros. Para estado plano de deformações, tem-se que:

$$\beta_{ij} = \beta_{ij} - (\beta_{i3}\beta_{j3})/\beta_{33} \quad \text{onde } i = 1, 2, 6$$

Ao introduzir a função de tensão de Airy (F) é possível garantir as condições de compatibilidade e equilíbrio. Na ausência de forças de corpo, a função de tensões (F) deve satisfazer a equação de Laplace:

$$\nabla^4 F = \nabla^2 (\nabla^2 F) = 0 \quad \text{onde} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (61)$$

Com isso, as equações de equilíbrio para as tensões são dadas por:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (62)$$

As componentes de deformação estão sujeitas à equação de compatibilidade (63):

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (63)$$

Substituindo as componentes de tensões (62) na relação (60) é possível obter:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \beta_{11} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \beta_{12} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \beta_{16} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \varepsilon_{yy} &= \beta_{21} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \beta_{22} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \beta_{26} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{xy} &= \beta_{61} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \beta_{62} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \beta_{66} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (64)$$

Ao substituir as equações (64) na equação (63) obtém-se:

$$\beta_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - 2\beta_{16} \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + (2\beta_{12} + \beta_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - 2\beta_{26} \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + \beta_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = 0 \quad (65)$$

Introduzindo a notação (66) é possível integrar $F(x, y)$ ao longo da superfície característica.

$$z = x + \mu y \quad \mu = a + bi, \quad i = \sqrt{-1} \quad (66)$$

Substituindo a equação (66) na equação (65) é possível chegar na seguinte formulação:

$$\frac{d^4 F}{dz^4} [\beta_{11} \mu^4 - 2\beta_{16} \mu^3 + (2\beta_{12} + \beta_{66}) \mu^2 - 2\beta_{26} \mu + \beta_{22}] = 0 \quad (67)$$

Para obtenção de soluções não triviais da equação (67), com $d^4 F/dz^4 \neq 0$, deve-se calcular as raízes da equação característica (68) que são complexas ou puramente imaginárias e ocorrem em pares conjugados (LEKHNITSKII, 1981):

$$\beta_{11} \mu^4 - 2\beta_{16} \mu^3 + (2\beta_{12} + \beta_{66}) \mu^2 - 2\beta_{26} \mu + \beta_{22} = 0 \quad (68)$$

As expressões para o ponto fonte e ponto campo no plano complexo são dadas pelas equações (69):

$$z'_k = x' + \mu_k y' \quad z_k = x + \mu_k y \quad \text{para } k = 1, 2 \quad (69)$$

A função de tensões pode ser representada pela seguinte relação (LEKHNITSKII, 1981):

$$F(x, y) = 2\text{Re} \{F_1(z_1) + F_2(z_2)\} \quad (70)$$

Introduzindo os potenciais complexos (71), que são representados pelas derivadas da função (70):

$$\Phi_1(z_1) = F_1'(z_1) \quad \Phi_2(z_2) = F_2'(z_2) \quad (71)$$

é possível determinar as derivadas de F:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2\text{Re} \{ \Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2) \} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2\text{Re} \{ \mu_1 \Phi_1(z_1) + \mu_2 \Phi_2(z_2) \} \quad (72)$$

A partir das equações (72), as tensões podem ser calculadas:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\text{Re} \{ \mu_1^2 \Phi_1'(z_1) + \mu_2^2 \Phi_2'(z_2) \} \\ \sigma_{yy} &= 2\text{Re} \{ \Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2) \} \\ \tau_{xy} &= -2\text{Re} \{ \mu_1 \Phi_1'(z_1) + \mu_2 \Phi_2'(z_2) \} \end{aligned} \quad (73)$$

Já os deslocamentos, desprezando os movimentos de corpo rígido, são obtidos por (LEKHNITSKII, 1981):

$$\begin{aligned} u_x &= 2\text{Re} \{ p_{11} \Phi_1(z_1) + p_{12} \Phi_2(z_2) \} \\ u_y &= 2\text{Re} \{ p_{21} \Phi_1(z_1) + p_{22} \Phi_2(z_2) \} \end{aligned} \quad (74)$$

onde:

$$\begin{aligned} p_{1k} &= \beta_{11} \mu_k^2 + \beta_{12} - \beta_{16} \mu_k \\ p_{2k} &= \beta_{12} \mu_k + \beta_{22} / \mu_k - \beta_{26} \end{aligned} \quad (75)$$

As forças de superfície são dadas por:

$$t_x = \sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y \quad t_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y \quad (76)$$

4.1 SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS PARA ANISOTROPIA

As soluções fundamentais para problemas bidimensionais podem ser obtidas utilizando tensões complexas.

A solução fundamental para o tensor de deslocamentos é definida a partir da equação (74), sabendo-se que a função Φ que satisfaz as condições de contorno é dada pela equação (77):

$$\Phi_{jk} = A_{jk} \ln(z_k - z_k') \quad (77)$$

Os coeficientes complexos A_{jk} são obtidos da solução de dois sistemas lineares de equações simultâneos conforme apresentado em (78):

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \mu_1 & -\bar{\mu}_1 & \mu_2 & -\bar{\mu}_2 \\ p_{11} & -\bar{p}_{11} & p_{12} & -\bar{p}_{12} \\ p_{21} & -\bar{p}_{21} & p_{22} & -\bar{p}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{j1} \\ \bar{A}_{j1} \\ A_{j2} \\ \bar{A}_{j2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{j2}/2\pi i \\ -\delta_{j1}/2\pi i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (78)$$

onde μ_k são as raízes da equação (68). Já $\bar{\mu}_k$, \bar{p}_{1k} e \bar{p}_{2k} são os conjugados das constantes.

As soluções fundamentais para os deslocamentos e forças de superfície são dadas por (ALIABADI, 2002):

$$U_{ij}(\mathbf{z}_k', \mathbf{z}_k) = 2\text{Re} [p_{j1} A_{i1} \ln(z_1 - z_1') + p_{j2} A_{i2} \ln(z_2 - z_2')] \quad (79)$$

$$T_{ij}(\mathbf{z}_k', \mathbf{z}_k) = 2\text{Re} \left\{ \frac{1}{(z_1 - z_1')} q_{j1} (\mu_1 n_1 - n_2) A_{i1} + \frac{1}{(z_2 - z_2')} q_{j2} (\mu_2 n_1 - n_2) A_{i2} \right\} \quad (80)$$

onde:

$$q_{jk} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (81)$$

A equação (82) que representa o tensor de deformações é:

$$\varepsilon_{jl} = \frac{1}{2} (u_{j,l} + u_{l,j}) \quad (82)$$

Para a obtenção das deformações, são calculadas as derivadas de T_{ij} e U_{ij} denominadas S_{jli} e D_{jli} (CRUSE; SWEDLOW, 1971), dadas por:

$$S_{jli} = \left[\frac{\partial T_{ji}}{\partial x_l} + \frac{\partial T_{li}}{\partial x_j} \right] \quad D_{jli} = \left[\frac{\partial U_{ji}}{\partial x_l} + \frac{\partial U_{li}}{\partial x_j} \right] \quad (83)$$

que, expandidas, resultam em:

$$S_{jli}(\mathbf{z}_k', \mathbf{z}_k) = -2\text{Re} \{ R_{l1} q_{i1} (\mu_1 n_1 - n_2) A_{j1}/z_1^2 + R_{l2} q_{i2} (\mu_2 n_1 - n_2) A_{j2}/z_2^2 \} + \\ -2\text{Re} \{ R_{j1} q_{i1} (\mu_1 n_1 - n_2) A_{l1}/z_1^2 + R_{j2} q_{i2} (\mu_2 n_1 - n_2) A_{l2}/z_2^2 \} \quad (84)$$

$$D_{jli}(\mathbf{z}_k', \mathbf{z}_k) = 2\text{Re} \{ R_{l1} P_{i1} A_{j1}/z_1 + R_{l2} P_{i2} A_{j2}/z_2 + R_{ji} P_{i1} A_{l1}/z_1 + R_{j2} P_{i2} A_{l2}/z_2 \} \quad (85)$$

onde: $R_{1k}=1$ e $R_{2k} = \mu_k$.

4.2 EQUAÇÃO INTEGRAL DO CONTORNO PARA ANISOTROPIA

O trabalho recíproco de Betti também é válido no caso de se considerar a anisotropia do material, ou seja:

$$\int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega \quad (86)$$

A equação do contorno, desprezando as forças de massa, é dada pela equação (87) para contornos suaves:

$$u_j/2 + \int_{\Gamma} T_{ji} u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ji} t_i d\Gamma = \Delta U_{ji} t_i - \Delta T_{ji} u_i \quad (87)$$

Para o cálculo dos deslocamentos nos pontos internos utiliza-se a mesma equação desenvolvida para materiais isotrópicos:

$$u_i(\mathbf{X}') = \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{X}', \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (88)$$

tal que:

$$2\varepsilon_{jl} = \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial T_{ji}}{\partial x_l} + \frac{\partial T_{li}}{\partial x_j} \right] u_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial U_{ji}}{\partial x_l} + \frac{\partial U_{li}}{\partial x_j} \right] t_i d\Gamma \quad (89)$$

A equação integral do contorno para o cálculo das deformações nos pontos internos é dada por:

$$2\varepsilon_{jl} = \int_{\Gamma} S_{jli} u_i d\Gamma - \int_{\Gamma} D_{jli} t_i d\Gamma = \Delta S_{jli} u_i - \Delta D_{jli} t_i \quad (90)$$

4.3 SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS INTEGRAIS PARA O CASO ANISOTRÓPICO

O cálculo das integrais, no caso do material anisotrópico, foi feito analiticamente conforme apresentado por Cruse e Swedlow (1971). Ao especificar a orientação de cada segmento de linha (figura 17) $\Delta\Gamma_m$, com suas respectivas normais (n_1, n_2), é possível determinar as integrais das equações (88) e (89). Além disso, o sistema de coordenadas (e_1, e_2) foi inserido de forma que e_1 representa a normal de $\Delta\Gamma_m$ e e_2 a tangente de $\Delta\Gamma_m$.

A partir da figura 17, é possível definir trigonometricamente as seguintes relações:

$$\begin{aligned} z_k &= r (\cos \varphi + \mu_k \sin \varphi) \\ D &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1 \\ d\Gamma &= D d(\tan \theta) \end{aligned} \quad (91)$$

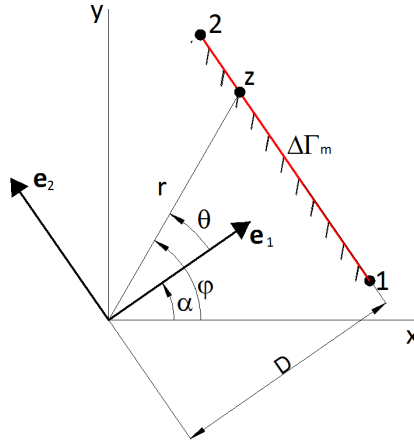


FIGURA 17 – ORIENTAÇÃO DE CADA SEGMENTO DE LINHA $\Delta\Gamma_m$ A SER INTEGRADO. (FONTE: ADAPTADO DE (CRUSE; SWEDLOW, 1971).)

Sabendo-se que $\varphi = \theta + \alpha$ e $\alpha = \cos^{-1}(n_1)$ é possível escrever z_k como:

$$z_k = r \cos \theta (\cos \alpha - \sin \alpha \tan \theta + \mu_k \cos \alpha \tan \theta + \mu_k \sin \alpha)$$

$$z_k = D [(\cos \alpha + \mu_k \sin \alpha) + (\mu_k \cos \alpha - \sin \alpha) \tan \theta] \quad (92)$$

Quando $D \neq 0$ as integrais das equações (88) e (90) são calculadas utilizando z_k da equação (92), empregando as equações abaixo:

$$\begin{aligned} \Delta I_{1k} &= \int_1^2 \ln(z_k) d\Gamma = \left\{ \frac{1}{\mu_k \cos \alpha - \sin \alpha} [z_k (\ln(z_k) - 1)] \right\}_1^2 \\ \Delta I_{2k} &= \Delta I_{3k} = \int_1^2 \frac{1}{z_k} d\Gamma = \left[\frac{1}{\mu_k \cos \alpha - \sin \alpha} \ln(z_k) \right]_1^2 \\ \Delta I_{4k} &= \int_1^2 \frac{1}{z_k^2} d\Gamma = \left[\frac{1}{\mu_k \cos \alpha - \sin \alpha} \left(-\frac{1}{z_k} \right) \right]_1^2 \end{aligned} \quad (93)$$

Um caso especial ocorre quando $D = 0$ e pode ser deduzido substituindo $d\Gamma$ por $d\Gamma = +d\mathbf{r}$ e $d\Gamma = -d\mathbf{r}$, onde $\theta = \pm(\pi/2)$. Portanto z_k é dado por:

$$z_k = \pm \mathbf{r} (\mu_k \cos \alpha - \sin \alpha) \quad (94)$$

Utilizando a equação (94) as integrais resultantes são:

$$\Delta I_{1k} = \int_1^2 \ln [\pm \mathbf{r} (\mu_k \cos \alpha - \sin \alpha)] (\pm d\mathbf{r}) = [\mathbf{r} (\ln(z_k) - 1)]_1^2$$

$$\begin{aligned}\Delta I_{2k} = \Delta I_{3k} &= \int_1^2 \frac{1}{\pm \mathbf{r} (\mu_k \cos \alpha - \sin \alpha)} (\pm d\mathbf{r}) = \left[\frac{1}{\mu_k \cos \alpha - \sin \alpha} \ln(\mathbf{r}) \right]_1^2 \\ \Delta I_{4k} &= \int_1^2 \frac{1}{[\pm \mathbf{r} (\mu_k \cos \alpha - \sin \alpha)]^2} (\pm d\mathbf{r}) = - \left[\frac{1}{(\mu_k \cos \alpha - \sin \alpha)^2} \left(\pm \frac{1}{\mathbf{r}} \right) \right]_1^2\end{aligned}\quad (95)$$

Os dois primeiros resultados das equações (93) e (95) contém o termo $\ln(z_k)$, que é um valor múltiplo e tem um salto de $+2\pi$. Portanto, se houver uma alteração maior que π na parte imaginária, é necessário efetuar a correção adicionando $\pm 2\pi$ na parte imaginária de $\ln(z_k)$.

Com isto, as equações (79), (80), (84) e (85) podem ser expressas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Delta U_{ij} &= 2\text{Re} [p_{j1} A_{i1} \Delta I_{11} + p_{j2} A_{i2} \Delta I_{12}] \\ \Delta T_{ij} &= 2\text{Re} \{q_{j1} (\mu_1 n_1 - n_2) A_{i1} \Delta I_{21} + q_{j2} (\mu_2 n_1 - n_2) A_{i2} \Delta I_{22}\} \\ \Delta S_{jli} &= -2\text{Re} \{R_{l1} q_{i1} (\mu_1 n_1 - n_2) A_{j1} \Delta I_{41} + R_{l2} q_{i2} (\mu_2 n_1 - n_2) A_{j2} \Delta I_{42}\} + \\ &\quad -2\text{Re} \{R_{j1} q_{i1} (\mu_1 n_1 - n_2) A_{l1} \Delta I_{41} + R_{j2} q_{i2} (\mu_2 n_1 - n_2) A_{l2} \Delta I_{42}\} \\ \Delta D_{jli} &= 2\text{Re} \{R_{l1} P_{i1} A_{j1} \Delta I_{31} + R_{l2} P_{i2} A_{j2} \Delta I_{32} + R_{j1} P_{i1} A_{l1} \Delta I_{31} + R_{j2} P_{i2} A_{l2} \Delta I_{32}\}\end{aligned}\quad (96)$$

4.4 VALIDAÇÃO DO ALGORITMO CONSIDERANDO A ANISOTROPIA DO MATERIAL

O primeiro teste de validação do algoritmo considerando a anisotropia do material (ver tabela 2) foi com uma cavidade num meio infinito, sob estado plano de deformações, submetida a pressão interna de 1MPa considerando 96 elementos constantes conforme ilustra a figura 18. Os resultados foram validados com a formulação isotrópica porém, no caso anisotrópico, os parâmetros utilizados foram quase isotrópicos, conforme formulação (97). Isso deve-se ao fato de que, para casos isotrópicos, a equação característica (68) se torna biquadrada com duas raízes iguais a i e duas iguais a $-i$ (PAIVA, 2006). Com isso, o determinante do sistema de equações (78) é nulo, ou seja, a matriz não pode ser invertida tornando o sistema indeterminado ou impossível.

$$E_2 = E_1 + \epsilon \cong E \quad \epsilon \leq 10^{-2} E_1 \quad \mu_{12} = \frac{E_1}{2(1 + \nu_{12})} \quad (97)$$

TABELA 2 – DADOS PARA ANÁLISE DO PROBLEMA.

E_1 (MPa)	$\nu_{12}=\nu_{21}$	E_2 (MPa)	μ_{12} (MPa)	raio: a (m)
60000,00	0,20	60600,00	25000,00	1,0

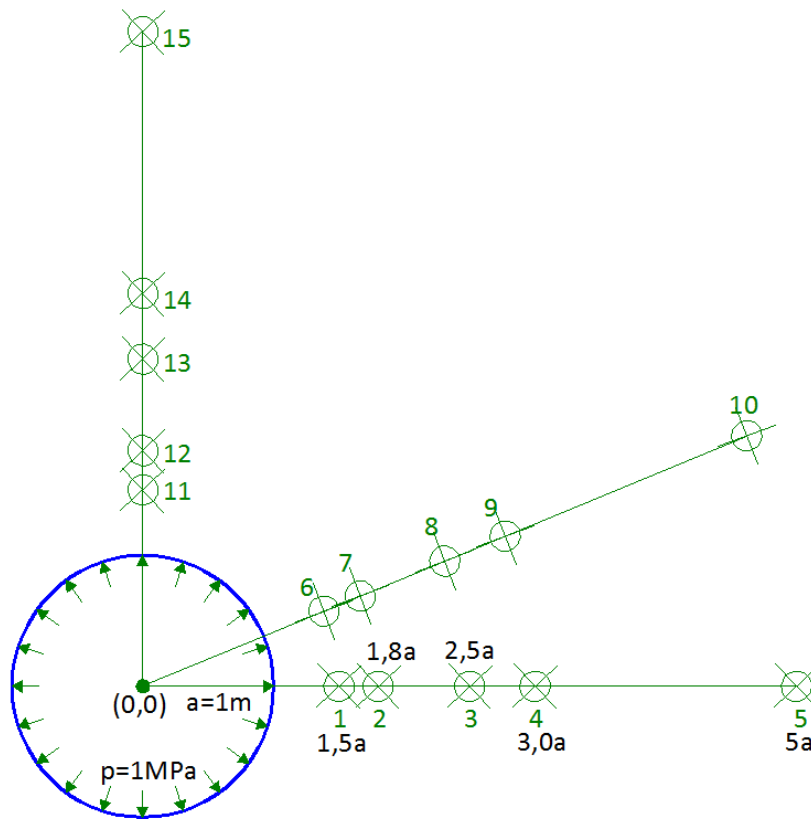


FIGURA 18 – EXEMPLO DE UMA CAVIDADE EM MEIO INFINITO COM RAIO DE 1M.

Os resultados obtidos com o modelo isotrópico e o quase-isotrópico são comparados com as soluções analíticas (HORGAN; BAXTER, 1996) descritas abaixo:

$$\sigma_r = -\frac{pa^2}{dist^2} \quad \sigma_\theta = \frac{pa^2}{dist^2} \quad u_r = \frac{(1+\nu)}{E} \frac{pa^2}{dist} \quad (98)$$

Na tabela 3 são apresentados os resultados obtidos para as tensões radiais com os seguintes modelos: isotrópico, anisotrópico ou quase-isotrópico e o analítico. Além disso, há três colunas contendo os erros percentuais obtidos com os modelos isotrópicos e anisotrópicos em relação ao analítico, além da variação de erro do modelo anisotrópico em relação ao isotrópico.

TABELA 3 – RESULTADOS DAS TENSÕES RADIAIS OBTIDAS PARA O MODELO DA FIGURA 18.

Pt.	σ_r Iso.	σ_r Aniso.	σ_r Analítico	Erro(%) Iso.	Erro(%) Aniso.	Δ Erro (%) (Aniso - Iso)
1	-4,463E-01	-4,465E-01	-4,444E-01	0,41	0,46	0,05
2	-3,099E-01	-3,101E-01	-3,086E-01	0,41	0,46	0,05
3	-1,607E-01	-1,607E-01	-1,600E-01	0,41	0,46	0,05
4	-1,116E-01	-1,116E-01	-1,111E-01	0,41	0,46	0,05
5	-4,016E-02	-4,018E-02	-4,000E-02	0,41	0,46	0,05
6	-4,463E-01	-4,453E-01	-4,444E-01	0,41	0,20	-0,21
7	-3,099E-01	-3,093E-01	-3,086E-01	0,41	0,20	-0,22
8	-1,607E-01	-1,603E-01	-1,600E-01	0,41	0,20	-0,22
9	-1,116E-01	-1,113E-01	-1,111E-01	0,41	0,20	-0,22
10	-4,017E-02	-4,008E-02	-4,000E-02	0,41	0,20	-0,22
11	-4,463E-01	-4,465E-01	-4,444E-01	0,41	0,46	0,05
12	-3,099E-01	-3,101E-01	-3,086E-01	0,41	0,46	0,05
13	-1,607E-01	-1,607E-01	-1,600E-01	0,41	0,46	0,05
14	-1,116E-01	-1,116E-01	-1,111E-01	0,41	0,46	0,05
15	-4,016E-02	-4,018E-02	-4,000E-02	0,41	0,46	0,05

Nas tabelas 4 e 5 são apresentados os resultados obtidos para as tensões tangenciais e os deslocamentos radiais, respectivamente.

TABELA 4 – RESULTADOS DAS TENSÕES ANGULARES OBTIDAS PARA O MODELO DA FIGURA 18.

Pt.	σ_θ Iso.	σ_θ Aniso.	σ_θ Analítico	Erro(%) Iso.	Erro(%) Aniso.	Δ Erro (%) (Aniso - Iso)
1	4,463E-01	4,453E-01	4,444E-01	0,41	0,20	-0,21
2	3,099E-01	3,093E-01	3,086E-01	0,41	0,20	-0,21
3	1,607E-01	1,603E-01	1,600E-01	0,41	0,20	-0,21
4	1,116E-01	1,113E-01	1,111E-01	0,41	0,20	-0,21
5	4,016E-02	4,008E-02	4,000E-02	0,41	0,20	-0,21
6	4,463E-01	4,465E-01	4,444E-01	0,41	0,45	0,04
7	3,099E-01	3,101E-01	3,086E-01	0,41	0,45	0,05
8	1,607E-01	1,607E-01	1,600E-01	0,41	0,45	0,04
9	1,116E-01	1,116E-01	1,111E-01	0,41	0,45	0,04
10	4,016E-02	4,018E-02	4,000E-02	0,41	0,45	0,04
11	4,463E-01	4,457E-01	4,444E-01	0,41	0,28	-0,13
12	3,099E-01	3,095E-01	3,086E-01	0,41	0,28	-0,13
13	1,607E-01	1,604E-01	1,600E-01	0,41	0,28	-0,13
14	1,116E-01	1,114E-01	1,111E-01	0,41	0,28	-0,13
15	4,016E-02	4,011E-02	4,000E-02	0,41	0,28	-0,13

TABELA 5 – RESULTADOS DOS DESLOCAMENTOS RADIAIS OBTIDOS PARA O MODELO DA FIGURA 18.

Pt.	u_r Iso.	u_r Aniso.	u_r Analítico	Erro(%) Iso.	Erro(%) Aniso.	Δ Erro (%) (Aniso - Iso)
1	1,339E-05	1,339E-05	1,333E-05	0,41	0,41	0,01
2	1,116E-05	1,116E-05	1,111E-05	0,41	0,41	0,01
3	8,033E-06	8,033E-06	8,000E-06	0,41	0,41	0,01
4	6,694E-06	6,694E-06	6,667E-06	0,41	0,41	0,01
5	4,016E-06	4,017E-06	4,000E-06	0,41	0,41	0,01
6	1,339E-05	1,350E-05	1,333E-05	0,41	1,24	0,82
7	1,116E-05	1,125E-05	1,111E-05	0,41	1,24	0,82
8	8,033E-06	8,100E-06	8,000E-06	0,41	1,24	0,82
9	6,694E-06	6,750E-06	6,667E-06	0,41	1,24	0,82
10	4,017E-06	4,050E-06	4,000E-06	0,41	1,24	0,82
11	1,339E-05	1,341E-05	1,333E-05	0,41	0,53	0,13
12	1,116E-05	1,117E-05	1,111E-05	0,41	0,53	0,13
13	8,033E-06	8,043E-06	8,000E-06	0,41	0,54	0,13
14	6,694E-06	6,703E-06	6,667E-06	0,41	0,54	0,13
15	4,016E-06	4,022E-06	4,000E-06	0,41	0,54	0,13

Por meio dos resultados obtidos é possível validar o algoritmo desenvolvido tendo em vista os valores resultantes dos erros percentuais.

A figura 19 ilustra o modelo de cavidade circular em meio infinito anisotrópico sob pressão interna ($p = 1$ MPa) conforme o exemplo apresentado por Xiao e Carter (1993).

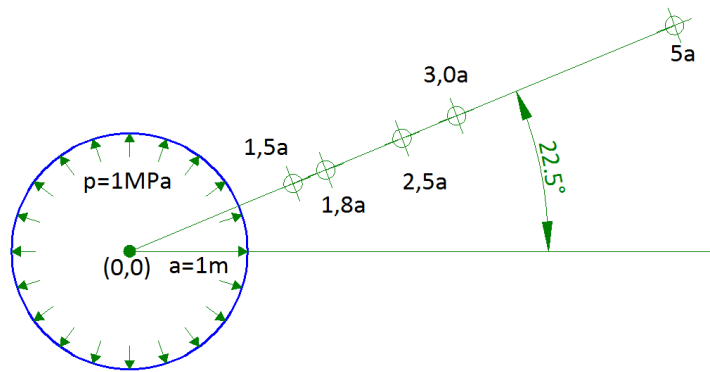


FIGURA 19 – EXEMPLO DE UMA CAVIDADE EM MEIO INFINITO COM RAIO DE 1M.

Os resultados obtidos foram comparados com as soluções analíticas (99) (LEKHNITS-KII, 1981).

$$\sigma_r = \frac{pa^{n+1}}{dist^{n+1}} \quad \sigma_\theta = \frac{pna^{n+1}}{dist^{n+1}} \quad \text{onde} \quad n = \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} \quad (99)$$

A relação de elasticidade para o modelo anisotrópico é dada por (100), onde as componentes da matriz 3x3 estão com a unidade em m^2/MN .

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0833 & -0,006 & 0,0 \\ -0,006 & 0,1667 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,430 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (100)$$

A tabela 6 mostra a comparação das tensões radiais ao longo da linha inclinada a 22,5 graus com o eixo conforme ilustra a figura 19 usando 24, 48 e 96 elementos constantes.

TABELA 6 – RESULTADOS DAS TENSÕES RADIAIS OBTIDAS COM O ALGORITMO ELABORADO.

Pt.	24 elementos		48 elementos		96 elementos		Solução Analítica
	σ_r	Erro (%)	σ_r	Erro (%)	σ_r	Erro (%)	
1,5a	-5,340E-01	6,89	-5,102E-01	2,11	-5,046E-01	1,01	-4,996E-01
1,8a	-3,748E-01	4,82	-3,658E-01	2,29	-3,614E-01	1,06	-3,576E-01
2,5a	-1,111E-01	6,60	-1,070E-01	2,69	-1,054E-01	1,18	-1,042E-01
3a	-3,042E-02	8,64	-2,890E-02	3,21	-2,836E-02	1,30	-2,800E-02
5a	1,403E-02	3,90	1,380E-02	2,19	1,367E-02	1,24	1,350E-02

TABELA 7 – RESULTADOS DAS TENSÕES RADIAIS DO ARTIGO (XIAO; CARTER, 1993).

Pt.	24 El. Quad.		24 El. Const.		48 El. Const.		Solução Analítica
	σ_r	Erro (%)	σ_r	Erro (%)	σ_r	Erro (%)	
1,5a	-5,010E-01	0,28	-5,117E-01	2,42	-5,064E-01	1,36	-4,996E-01
1,8a	-3,576E-01	0,00	-3,771E-01	5,45	-3,632E-01	1,57	-3,576E-01
2,5a	-1,042E-01	0,00	-1,111E-01	6,62	-1,066E-01	2,30	-1,042E-01
3a	-2,800E-02	0,00	-3,050E-02	8,93	-2,900E-02	3,57	-2,800E-02
5a	1,350E-02	0,00	1,400E-02	3,70	1,360E-02	0,74	1,350E-02

Analisando os resultados obtidos, é possível afirmar que o código elaborado gerou resultados coerentes quando comparados a outros estudos, como o de Xiao e Carter (1993), apresentado na tabela 7. Além disso, à medida que o contorno é discretizado com mais elementos, os resultados se aproximam ainda mais dos analíticos.

5 ANÁLISE PROBABILÍSTICA APLICADA À ANÁLISE DE TÚNEIS

Neste capítulo é abordado o Método de Monte Carlo com os tipos de distribuição estatística adotados para os diversos parâmetros do problema em análise. Além disso, testes incluindo as formulações do MEC com materiais isotrópicos e anisotrópicos são apresentados e validados para maciços rochosos hipotéticos.

5.1 ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE UM PROJETO

Visando a determinação dos coeficientes de segurança mínimos para a construção de estruturas econômicas e com qualidade, é interessante efetuar uma análise de confiabilidade tendo em vista as incertezas presentes na obtenção dos parâmetros que constituem um maciço rochoso. Um dos aspectos que deve ser avaliado em um maciço rochoso são as tensões *in situ*, pois, durante uma escavação, alterações no campo de deformações do maciço são geradas e novas tensões surgem podendo impactar diretamente na estabilidade de um túnel. Além disso, outro fator de fundamental importância no estudo da abertura de um túnel são as características das descontinuidades e do maciço rochoso, pois podem induzir anisotropia na direção do plano de ruptura do maciço rochoso, além de instabilidades próximas à escavação. Portanto, a justificativa para a realização de estudos de confiabilidade decorre de questões como:

- Por que estruturas aparentemente robustas podem apresentar instabilidade?
- Quais as causas e os mecanismos de falha?
- Como medir e testar a confiabilidade de um projeto?
- Como manter projetos confiáveis, por meio de manutenção, diagnóstico de falhas e prognóstico?

As questões adicionadas acima são baseadas na definição quantitativa da confiabilidade em termos probabilísticos. Cabe ressaltar a dificuldade em se caracterizar os parâmetros realistas de um maciço rochoso.

Em síntese, este capítulo tem o objetivo de mostrar o impacto na determinação de regiões de ruptura que podem surgir numa estrutura, decorrentes das incertezas dos parâmetros de entrada.

5.2 INCERTEZAS DOS DADOS

Considerando um experimento ε e um espaço amostral Ω , tem-se que para cada evento V é atribuído um número real $W(V)$ o qual pode ser nomeado como probabilidade de ocorrência de V e deve satisfazer os três axiomas de Kolmogorov (ZIO, 2013) a seguir:

1. Para cada evento V , $0 \leq W(V) \leq 1$;
2. Para o espaço amostral Ω é conhecido que $W(\Omega) = 1$, já para o evento \emptyset é dado que $W(\emptyset) = 0$;
3. Se $V_1, V_2 \dots V_n$ são eventos finitos mutuamente exclusivos, então:

$$W\left(\bigcup_{i=1}^n V_i\right) = \sum_{i=1}^n W(V_i) \quad (101)$$

A equação (101) do axioma é chamada de Lei da Adição, que também é válida para o caso de espaço amostral infinito contável. No presente contexto, um evento pode ser entendido como o conjunto de parâmetros que caracterizam o maciço rochoso.

5.3 MÉTODO DE MONTE CARLO

O método da Simulação de Monte Carlo (SMC) é uma ferramenta de modelagem poderosa para análise de sistemas complexos, pois é capaz de obter aproximações numéricas de problemas onde não existem soluções analíticas. Uma das definições para este método é dada como uma metodologia para estimar a obtenção de soluções de problemas matemáticos por meio de números aleatórios.

Com o avanço tecnológico, os computadores vem se tornando cada vez mais rápidos e a aplicação da SMC torna-se mais viável na prática de vários campos. Conforme Zio (2013), as tarefas comuns a várias aplicações são:

- Simulação de caminhos aleatórios em um ambiente naturalmente estocástico ou para a solução de equações tanto diferenciais quanto integrais;
- Adoção de métodos de redução de variância para melhorar a eficiência dos cálculos SMC.

Na prática, a principal desvantagem no uso da ferramenta SMC consiste na utilização de tempos de cálculo relevantes que divergem com a precisão requerida. Esta desvantagem é diminuída tendo em vista o rápido desenvolvimento da computação e a disponibilidade de técnicas eficientes para executar as simulações.

Com isso, o método de Monte Carlo foi utilizado com o objetivo de avaliar a distribuição dos resultados das tensões críticas no maciço rochoso em função da variabilidade presente nos parâmetros que caracterizam o maciço.

5.3.1 Amostragem de Números Aleatórios

Dado que X é uma variável aleatória e obedece a uma função de distribuição acumulativa (FDA), tem-se que:

$$P(X \leq x) = F_x(x); \quad F_x(-\infty) = 0; \quad F_x(\infty) = 1 \quad (102)$$

A variável X obedece à função FDA, portanto: $X \sim F_x(x)$. Da definição, $F_x(x)$ é uma função não decrescente, sendo possível admitir que ela é contínua e diferenciável. Portanto, a função densidade de probabilidade (FDP) pode ser representada por:

$$f_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx}; \quad f_x(x) \geq 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx = 1 \quad (103)$$

Visando agora uma sequência de números aleatórios pertencentes à FDP $F_x(x)$, para $N \gg 1$, os valores para X são dados por $\{X\} \equiv \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ amostradas em $F_x(x)$ deve ser tal que o número n de pontos aleatórios deve estar dentro do intervalo $\Delta x = X_{\max} - X_{\min}$ (onde X_{\min} e X_{\max} são os valores mínimos e máximos em X). É possível afirmar que:

$$\frac{n}{N} \simeq \int_{\Delta x} f_x(x) dx \quad (104)$$

Isto é, os dados amostrados para o histograma devem ser aproximados em $f_x(x)$.

5.3.2 Distribuições Uniforme e Normal

Entre todas as distribuições, a distribuição uniforme pertencente ao intervalo $[0,1]$, denotado por $U[0,1]$ ou $U(0,1)$, desempenha um papel de grande importância uma vez que a amostragem, a partir dessa distribuição, permite a obtenção da variável aleatória obedecendo a qualquer outra distribuição.

Tendo em vista as incertezas inerentes aos dados de entrada do modelo computacional, foram inseridos neste trabalho modelos probabilísticos representados por distribuições uniforme equação (105) e normal equação (106), dadas por:

$$F_P = P_{\min} + (P_{\max} - P_{\min}) N_{AL} \quad (105)$$

$$F_P = DesvP_P Z + Media_P \quad (106)$$

onde F_P é a função que calcula o parâmetro variável; P_{\min} , P_{\max} são os valores mínimo e máximo para o parâmetro variável; N_{AL} é um número aleatório; Z é a variável aleatória com distribuição normal; $DesvP_P$ é o desvio padrão; e $Media_P$ é a média.

A função densidade de probabilidade adotada refere-se à transformação de Box-Muller (BOX; MULLER, 1958), que é um método para geração de distribuição normal padrão independente representada por:

$$Z = \sqrt{-2\ln U_1} \cos(2\pi U_2) \quad (107)$$

onde U_1 e U_2 são os números aleatórios independentes.

5.4 RESULTADOS DA INFLUÊNCIA DAS TENSÕES INICIAIS PARA MATERIAL ISOTRÓPICO

Nesta seção são apresentadas quatro situações de entrada de dados, com elementos constantes e lineares, para o modelo teórico de Hoek Brown, conforme explicado no item 3.9.2. O maciço do túnel hipotético possui as propriedades mecânicas de um granito gnaíse, com a tensão principal máxima (σ_1) formando 14 graus com o sistema cartesiano (figura 20), e os valores dos respectivos parâmetros são apresentados na tabela 8. Na primeira situação de análise, todos os parâmetros são constantes. Na segunda situação, fez-se uma avaliação das diferenças com a introdução da variação linear do dano com a distância. Na terceira situação, adotou-se um intervalo de incertezas para as tensões iniciais com probabilidade de ocorrência uniforme. Por fim, na quarta situação, foram inseridas incertezas com distribuições normais para alguns parâmetros (GSI, m_i e resistência uniaxial da rocha intacta). A figura 21 ilustra a malha com 8007 pontos internos de domínio e 180 elementos de contorno utilizados para verificação em todas as análises efetuadas. O diâmetro do túnel é de 3,5 m e a região para análise das tensões e dos pontos de ruptura possui uma área $14 \times 14 \text{ m}^2$.

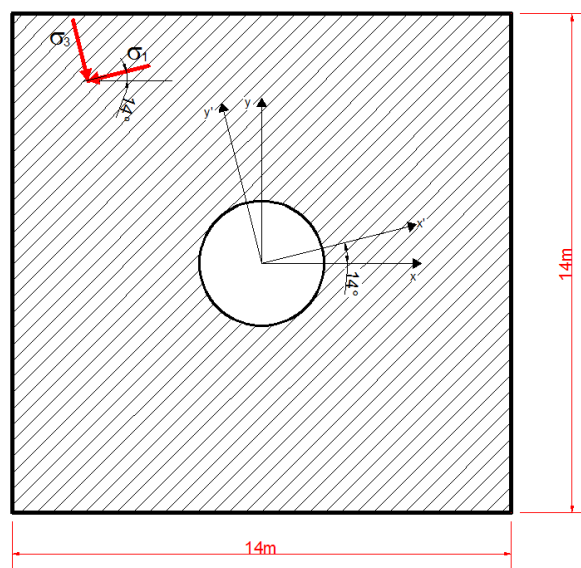


FIGURA 20 – MODELO TEÓRICO COM AS TENSÕES PRINCIPAIS ROTACIONADAS À 14 GRAUS.

TABELA 8 – DADOS DE ENTRADA PARA AS QUATRO SITUAÇÕES.

	Variável	Mínimo	Máximo	TD ¹	Desvio Padrão	Média
1ª Situação	E (MPa)	60000	60000	-	-	-
	ν	0,20	0,20	-	-	-
	σ_1 (MPa)	55	55	-	-	-
	σ_3 (MPa)	14	14	-	-	-
	GSI	80	80	-	-	-
	mi	32	32	-	-	-
	θ (°)	14	14	-	-	-
	σ_c (MPa)	210	210	-	-	-
	Distância (m)	0	0	-	-	-
	Dano	0	0	-	-	-
2ª Situação	E (MPa)	60000	60000	-	-	-
	ν	0,20	0,20	-	-	-
	σ_1 (MPa)	55	55	-	-	-
	σ_3 (MPa)	14	14	-	-	-
	GSI	80	80	-	-	-
	mi	32	32	-	-	-
	θ (°)	14	14	-	-	-
	σ_c (MPa)	210	210	-	-	-
	Distância (m)	2	2	-	-	-
	Dano	1	1	-	-	-
3ª Situação	E (MPa)	60000	60000	-	-	-
	ν	0,20	0,20	-	-	-
	σ_1 (MPa)	52	58	1	-	-
	σ_3 (MPa)	11	17	1	-	-
	GSI	80	80	-	-	-
	mi	32	32	-	-	-
	θ (°)	14	14	-	-	-
	σ_c (MPa)	210	210	-	-	-
	Distância (m)	0	0	-	-	-
	Dano	0	0	-	-	-
4ª Situação	E (MPa)	60000	60000	-	-	-
	ν	0,20	0,20	-	-	-
	σ_1 (MPa)	52	58	1	-	-
	σ_3 (MPa)	11	17	1	-	-
	GSI	75	85	2	5	80
	mi	29	35	2	3	32
	θ (°)	14	14	-	-	-
	σ_c (MPa)	180	240	2	30	210
	Distância (m)	0	0	-	-	-
	Dano	0	0	-	-	-

¹ TD: tipo de distribuição: 1 uniforme; 2 normal.

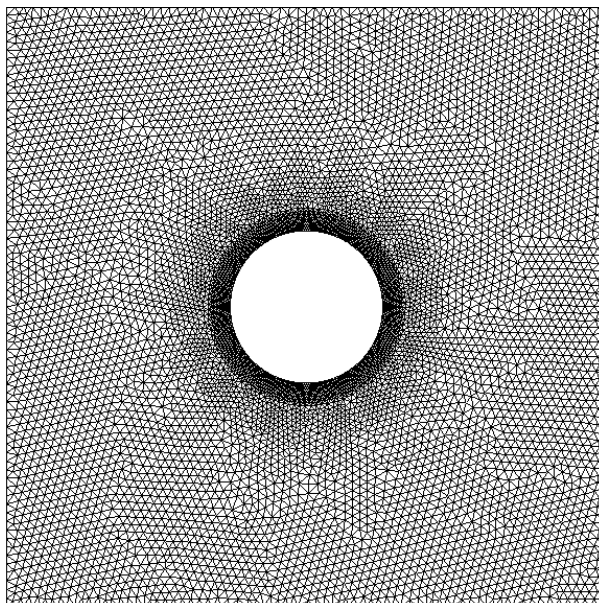


FIGURA 21 – MALHA DE PONTOS INTERNOS ADOTADA PARA APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS DE DOMÍNIO E VERIFICAÇÃO DA ESTABILIDADE.

Para a quarta situação, como foi adotada distribuição normal para os parâmetros da rocha, um limite de corte, equivalente a dois desvios padrão, foi estabelecido com o intuito de restringir a faixa de valores possíveis conforme ilustra a figura 22.

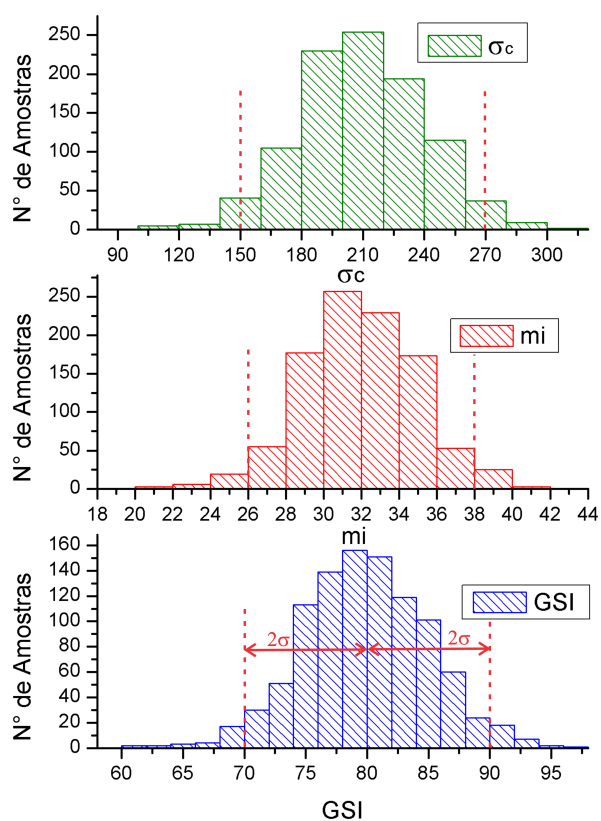


FIGURA 22 – HISTOGRAMA DOS PARÂMETROS EMPREGADOS EM 1000 ANÁLISES.

5.4.1 Primeira Situação

Ao aplicar o critério de ruptura de Hoek-Brown para a primeira situação apresentada, os resultados obtidos correspondem às figuras 23a e 23b, que mostram a região de pontos onde ocorreu ruptura ao redor da cavidade para análises com elementos constantes e lineares, respectivamente. Os resultados obtidos com os dois tipos de elementos são semelhantes e apresentam pequenas diferenças nas proximidades do contorno, em virtude da aproximação limitada do elemento constante.

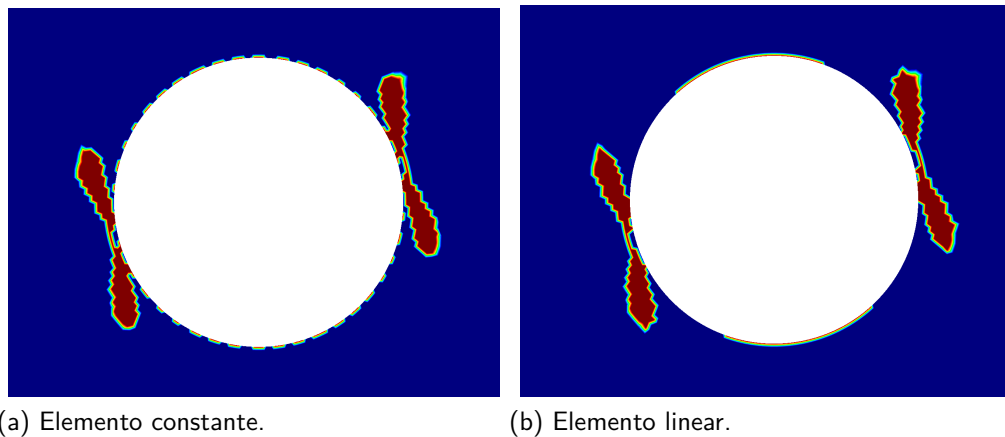


FIGURA 23 – REGIÃO DE RUPTURA PARA A 1ª SITUAÇÃO.

As figuras 24a e 24b apresentam os campos de tensões principais σ_1 obtidas para o modelo com elementos constantes e lineares.

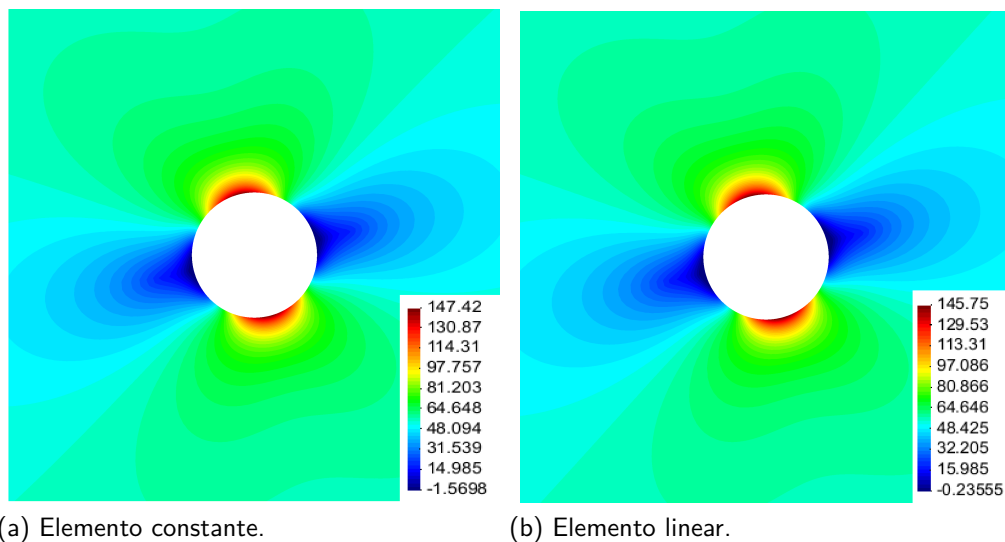


FIGURA 24 – TENSÕES PRINCIPAIS σ_1 (MPa) PARA A 1ª SITUAÇÃO.

As figuras 25a e 25b apresentam os campos de tensões principais σ_3 obtidas para o modelo com elementos constantes e lineares. Vale a pena enfatizar que a convenção de sinais

adotada, para a apresentação dessas imagens, foi positivo para compressão e negativo para tração.

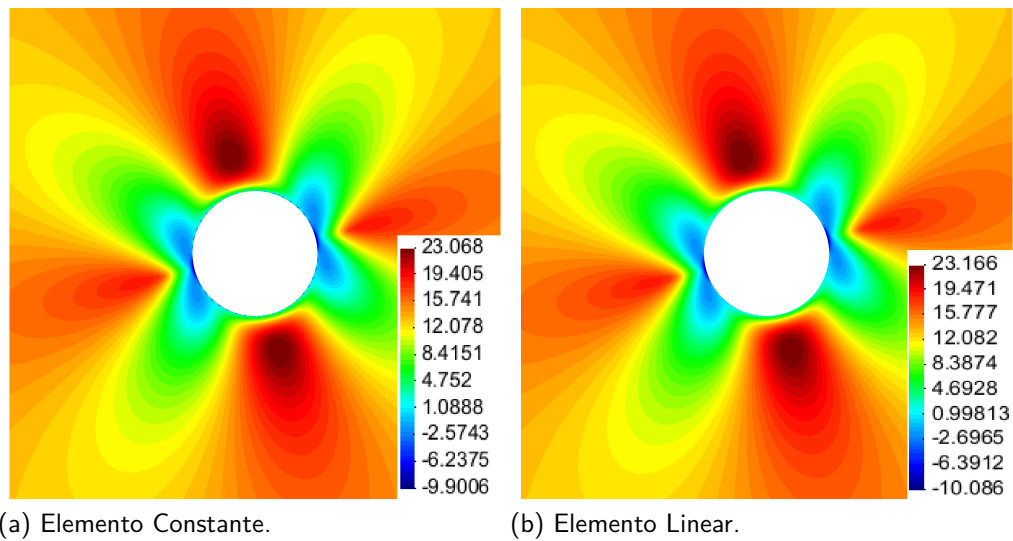


FIGURA 25 – TENSÕES PRINCIPAIS σ_3 (MPa) PARA A 1ª SITUAÇÃO.

É possível perceber nas imagens 24 e 25 a rotação de 14 graus das tensões principais.

5.4.2 Segunda Situação

A segunda situação difere da primeira no que diz respeito aos parâmetros que definem o fator de dano no entorno da cavidade. Nesta situação, definiu-se a presença de dano com valor máximo junto à parede da cavidade, reduzindo-se o valor a zero em distâncias superiores a 2 m da mesma.

As figuras 26a e 26b ilustram as regiões de ruptura obtidas para a 2ª situação para o caso constante e linear, respectivamente.

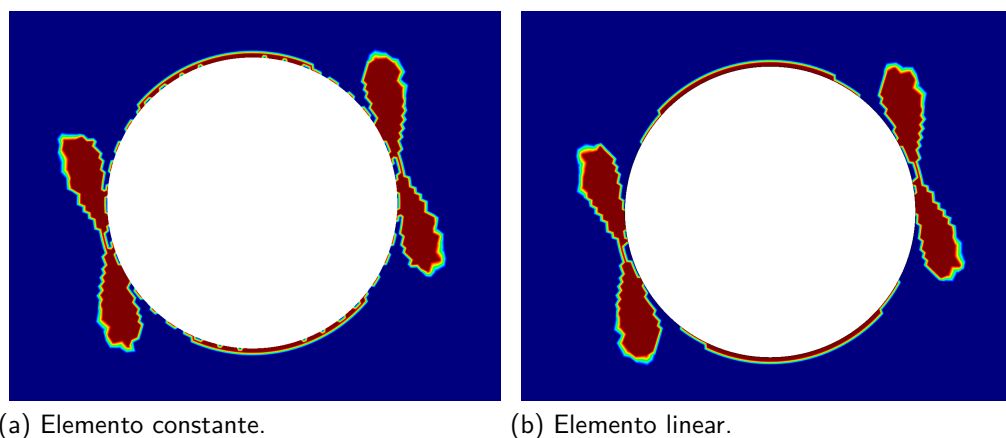


FIGURA 26 – REGIÃO DE RUPTURA PARA A 2ª SITUAÇÃO.

As figuras 27a e 27b ilustram a superposição das regiões de ruptura para as duas primeiras situações com elementos constantes e lineares. A partir destes resultados, conclui-se que a região de ruptura da 1ª situação está contida na região da 2ª situação (destacada em amarelo), o que era esperado.

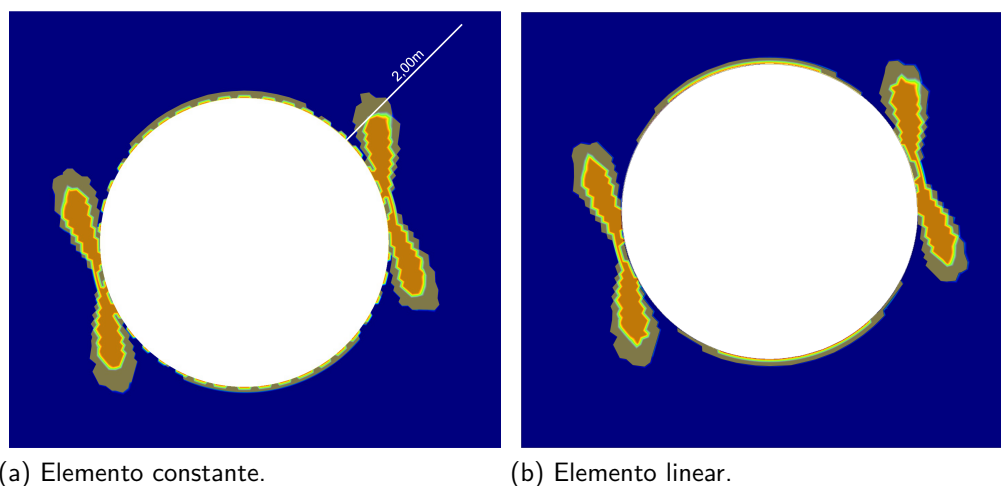


FIGURA 27 – SUPERPOSIÇÃO DAS REGIÕES DE FALHA DAS SITUAÇÕES 1 E 2.

5.4.3 Terceira Situação

Na terceira situação, como foi inserida uma distribuição uniforme para as tensões iniciais principais do problema, 1000 análises foram feitas para obtenção dos campos de tensões críticas. Na tabela 9 mostram-se as duas análises (A e B) que correspondem à pior e à melhor combinação de σ_1 e σ_3 , respectivamente. O caso A refere-se à combinação de dados de entrada em que ocorreram mais pontos de ruptura no modelo e o caso B corresponde à combinação de dados de entrada em que menos pontos de ruptura surgiram.

TABELA 9 – VALORES DAS TENSÕES PRINCIPAIS SIGNIFICATIVAS OBTIDAS EM 1000 ANÁLISES.

	Caso A		Caso B	
	σ_1 (MPa)	σ_3 (MPa)	σ_1 (MPa)	σ_3 (MPa)
El. constante	52,00	11,00	57,48	16,48
El. linear	52,00	11,00	57,97	16,97

As figuras 28a e 28b apresentam as regiões de ruptura obtidas para a combinação de dados de entrada em que ocorreram mais pontos de ruptura para elementos constantes e lineares, respectivamente. Já as figuras 28c e 28d ilustram as regiões de ruptura obtidas para a combinação de dados de entrada em que ocorreram menos pontos de ruptura. No caso B é possível perceber que os pontos de ruptura ficaram concentrados no contorno da cavidade para ambos os elementos. Além disso, observa-se uma distribuição mais uniforme, principalmente

próximo do contorno, nos resultados obtidos com o elemento linear quando comparado ao elemento constante.

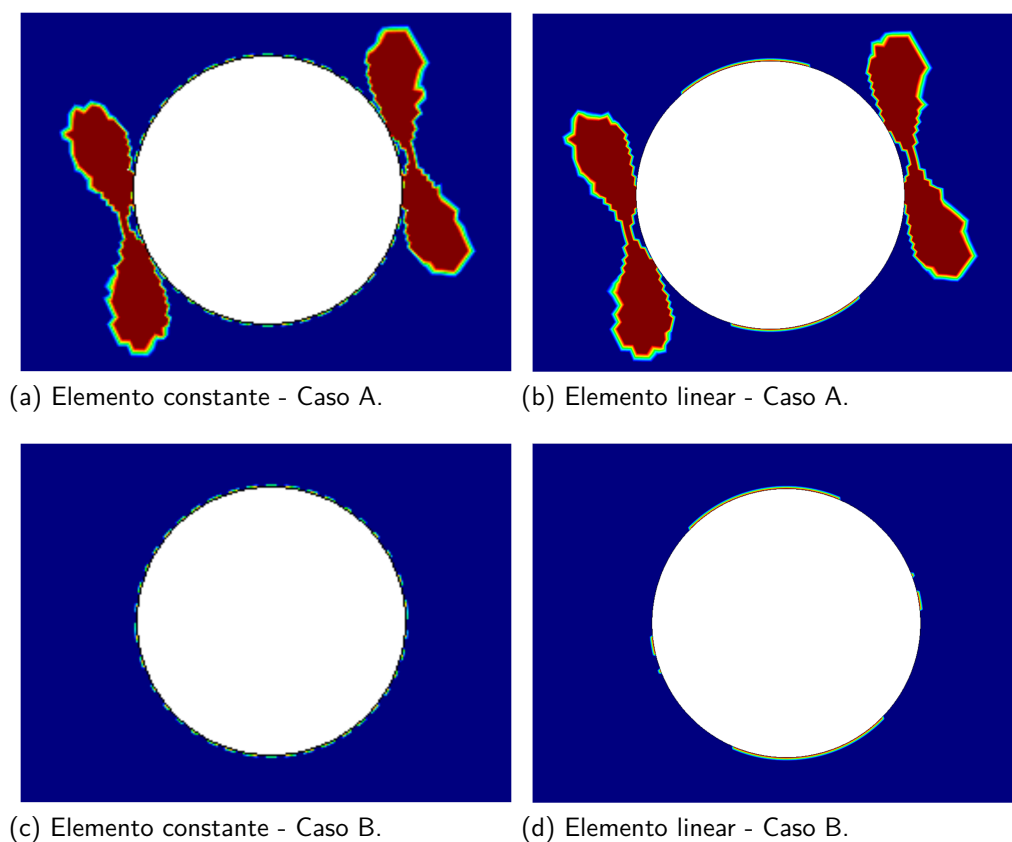


FIGURA 28 – REGIÕES DE RUPTURA OBTIDAS PARA A 3ª SITUAÇÃO.

5.4.4 Quarta Situação

Por fim, apresentam-se na tabela 10 os parâmetros da rocha (GSI , m_i , σ_c), resultantes da 4ª Situação, sendo o Caso C pertencente à maior região de ruptura e o Caso D à menor região de ruptura.

TABELA 10 – VALORES DOS PARÂMETROS VARIÁVEIS OBTIDOS PARA 1000 ANÁLISES.

		Caso C	Caso D
El. constante	σ_1 (MPa)	52,10	57,70
	σ_3 (MPa)	11,10	16,70
	GSI	79	90
	mi	31	38
	σ_c (MPa)	204,50	270,00
El. linear	σ_1 (MPa)	52,33	58,00
	σ_3 (MPa)	11,33	17,00
	GSI	78	90
	mi	31	38
	σ_c (MPa)	200,00	270,00

A figura 29 apresenta as regiões de ruptura obtidas nos casos C (mais pontos de ruptura) para elementos constantes e lineares. Vale a pena ressaltar que para o Caso D os pontos de ruptura ficaram concentrados no contorno da cavidade, ou seja, a região de ruptura é quase desprezível. Ainda na figura 29, foram identificados alguns pontos do domínio, A-E, para a apresentação dos resultados obtidos nas 1000 análises. Para efeito de comparação, utilizou-se o gráfico definido no RocLab (ROCSCIENCE, 2013) (curva com traçado em preto na figura 30) onde os parâmetros da rocha (GSI, mi , σ_c) adotados referem-se ao ponto médio para o traçado da curva de Hoek-Brown.

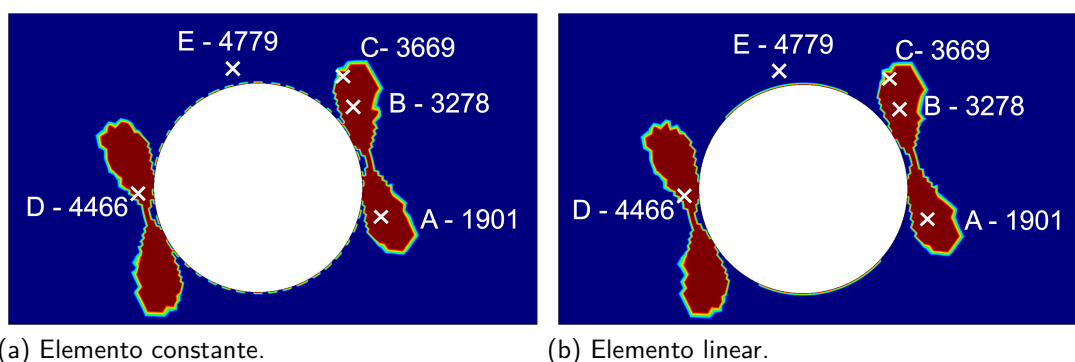


FIGURA 29 – REGIÕES DE RUPTURA OBTIDAS PARA 4ª SITUAÇÃO.

Os resultados são apresentados nas figuras 30a e 30b para elementos constantes e lineares, respectivamente. Observa-se que a maior parte das 1000 análises efetuadas para os pontos A e B ficou fora da região de segurança. Já para os pontos C e D, a maior parte das análises ficou dentro da região de segurança. Por fim, tem-se o ponto E que atendeu ao critério de segurança de Hoek-Brown em todas as análises. Comparando ambas as formulações, tanto

com elementos constantes quanto lineares, não se observa uma diferença significativa a ser destacada.

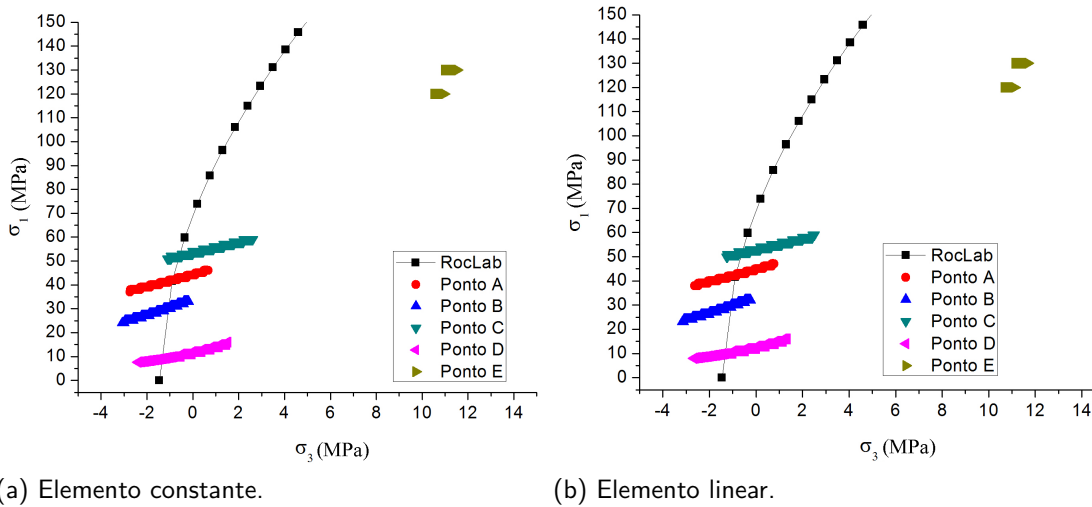


FIGURA 30 – GRÁFICOS DAS TENSÕES PRINCIPAIS $\sigma_3 \times \sigma_1$ PARA 1000 ANÁLISES.

5.5 VALIDAÇÃO DO CÓDIGO ANISOTRÓPICO COM O MÉTODO DE MONTE CARLO

Para o caso anisotrópico, são apresentadas situações de um maciço rochoso com uma cavidade em que as propriedades são de uma rocha sã. Assim como no caso isotrópico, o maciço do túnel hipotético, para a formulação anisotrópica, possui as propriedades mecânicas de um granito gnaisse, com a tensão principal maior (σ_1) formando 14 graus com o sistema cartesiano (figura 31a). Com relação aos parâmetros de entrada, foram realizados oito testes que serão apresentados nas tabelas a seguir. A figura 31a ilustra os pontos escolhidos para representar os resultados para uma população de 10000 amostras. A figura 31b apresenta a malha de pontos internos utilizada nas análises. O túnel possui 3,5 m de diâmetro e a região para análise das tensões e dos pontos de ruptura possui uma área $14 \times 14 \text{ m}^2$.

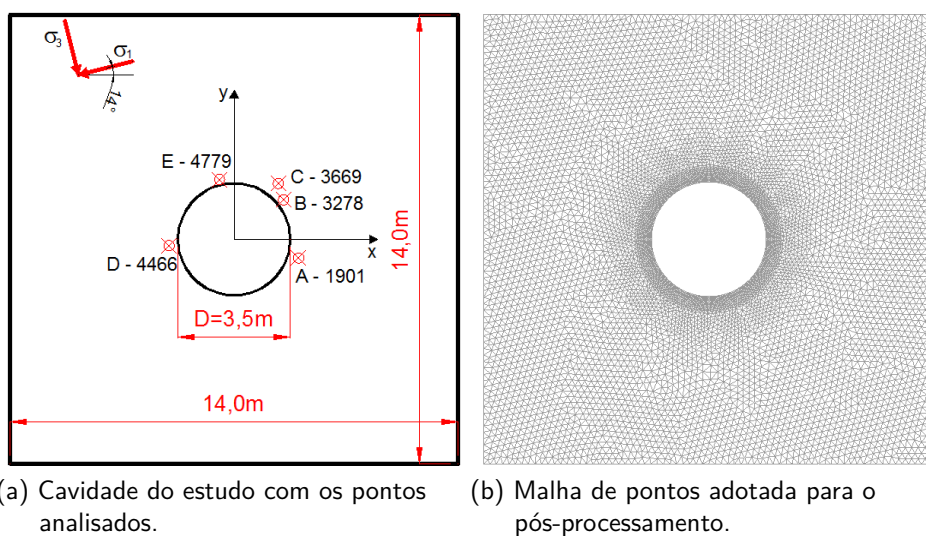


FIGURA 31 – CAVIDADE UTILIZADA NAS ANÁLISES.

5.5.1 Testes com Distribuição Normal para os Parâmetros do Maciço Rochoso

Os testes iniciais realizados com o algoritmo serviram para definir algumas condições importantes de serem implementadas para aplicação do Método de Monte Carlo. Para isto, utilizou-se uma distribuição normal para os parâmetros da rocha, conforme destacados na tabela 11, e 10000 eventos foram analisados. A distribuição dos eventos é apresentada no histograma da figura 32 onde as linhas tracejadas foram inseridas para ilustrar o limite, equivalente a dois desvios padrão, definido para os parâmetros que serão utilizados no cálculo da região de ruptura da cavidade dos testes que serão apresentados na sequência.

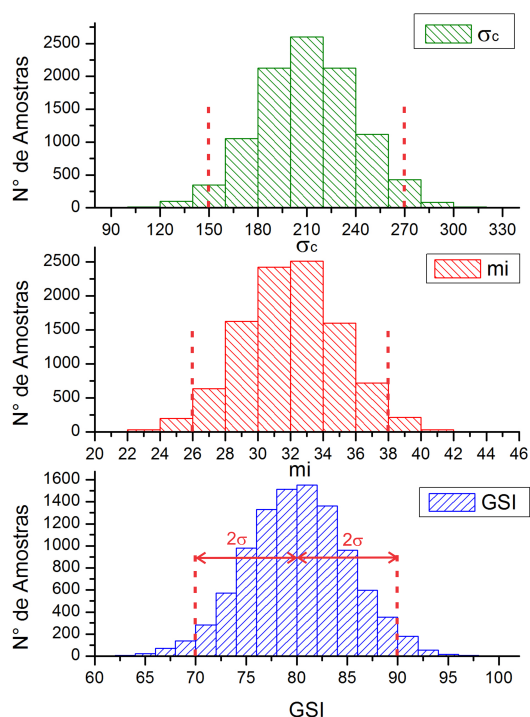


FIGURA 32 – HISTOGRAMA DOS PARÂMETROS OBTIDOS EM 10000 ANÁLISES.

Após definidas as restrições, deu-se início aos testes realizados com a formulação anisotrópica e o Método de Monte Carlo. Para isto, três situações foram arbitradas (tabela 11), introduzindo uma distribuição normal para os parâmetros da rocha (GSI, mi e σ_c). A diferença entre os casos está na variação das tensões *in situ* que foram introduzidas com acréscimos de $\pm 25\%$, $\pm 50\%$ e $\pm 75\%$ sobre o valor médio das tensões *in situ* em cada direção (σ_1 e σ_3), conforme descrito na tabela 11.

TABELA 11 – DADOS DE ENTRADA PARA O CASO ANISOTRÓPICO COM DISTRIBUIÇÃO NORMAL PARA OS PARÂMETROS DO MACIÇO ROCHOSO.

	Variável	Mínimo	Máximo	TD ¹	Desvio Padrão	Média
5ª Situação	E_1 (MPa)	60000	60000	-	-	-
	E_2 (Mpa)	30000	50000	1	-	-
	$\nu_{12}=\nu_{21}$	0,20	0,20	-	-	-
	$\eta_{12,1}=\eta_{2,12}$	0	0	-	-	-
	σ_3 (MPa)	10,50	17,50	1	-	-
	σ_1 (MPa)	41,25	68,75	1	-	-
	GSI	75	85	2	5	80
	mi	29	35	2	3	32
	$\theta(^{\circ})$	14	14	-	-	-
	σ_c (MPa)	180	240	2	30	210
	Distância (m)	0	0	-	-	-
	Dano	0	0	-	-	-
6ª Situação	E_1 (MPa)	60000	60000	-	-	-
	E_2 (Mpa)	30000	50000	1	-	-
	$\nu_{12}=\nu_{21}$	0,20	0,20	-	-	-
	$\eta_{12,1}=\eta_{2,12}$	0	0	-	-	-
	σ_3 (MPa)	7	21	1	-	-
	σ_1 (MPa)	27,5	82,5	1	-	-
	GSI	75	85	2	5	80
	mi	29	35	2	3	32
	$\theta(^{\circ})$	14	14	-	-	-
	σ_c (MPa)	180	240	2	30	210
	Distância (m)	0	0	-	-	-
	Dano	0	0	-	-	-
7ª Situação	E_1 (MPa)	60000	60000	-	-	-
	E_2 (MPa)	30000	50000	1	-	-
	$\nu_{12}=\nu_{21}$	0,20	0,20	-	-	-
	$\eta_{12,1}=\eta_{2,12}$	0	0	-	-	-
	σ_3 (MPa)	3,5	24,5	1	-	-
	σ_1 (MPa)	13,75	96,25	1	-	-
	GSI	75	85	2	5	80
	mi	29	35	2	3	32
	$\theta(^{\circ})$	14	14	-	-	-
	σ_c (MPa)	180	240	2	30	210
	Distância (m)	0	0	-	-	-
	Dano	0	0	-	-	-

¹ TD: tipo de distribuição: 1 uniforme; 2 normal.

Para validação do programa no que tange os parâmetros de entrada do programa, foram feitos vários testes (aproximadamente 20 testes) aplicando a distribuição normal para os parâmetros da rocha. O objetivo destes testes foi verificar se a formulação estava correta quando o Método de Monte Carlo foi aplicado. Com isto, foi possível perceber uma instabilidade numérica no sistema para o caso anisotrópico ao utilizar valores do módulo de deformabilidade próximos ao isotrópico em 5 pontos no eixo de simetria inferior da cavidade. Isso acontece devido às singularidades que ocorrem na solução dos dois sistemas. Para ilustrar esse fato tem-se o gráfico da figura 33 que apresenta a variação da raiz complexa da fórmula (108) já apresentada no capítulo 4 versus a equação (109) que calcula os deslocamentos em 5 pontos de simetria no contorno.

$$\beta_{11}\mu^4 - 2\beta_{16}\mu^3 + (2\beta_{12} + \beta_{66})\mu^2 - 2\beta_{26}\mu + \beta_{22} = 0 \quad (108)$$

$$F_\delta = \sum_{n=1}^5 (\delta_{xn}^2 + \delta_{yn}^2) \quad (109)$$

onde F_δ representa a equação do somatório dos quadrados dos deslocamentos de alguns pontos no contorno; δ_{xn} é o deslocamento na direção x em um ponto do contorno e δ_{yn} é o deslocamento na direção y em um ponto do contorno.

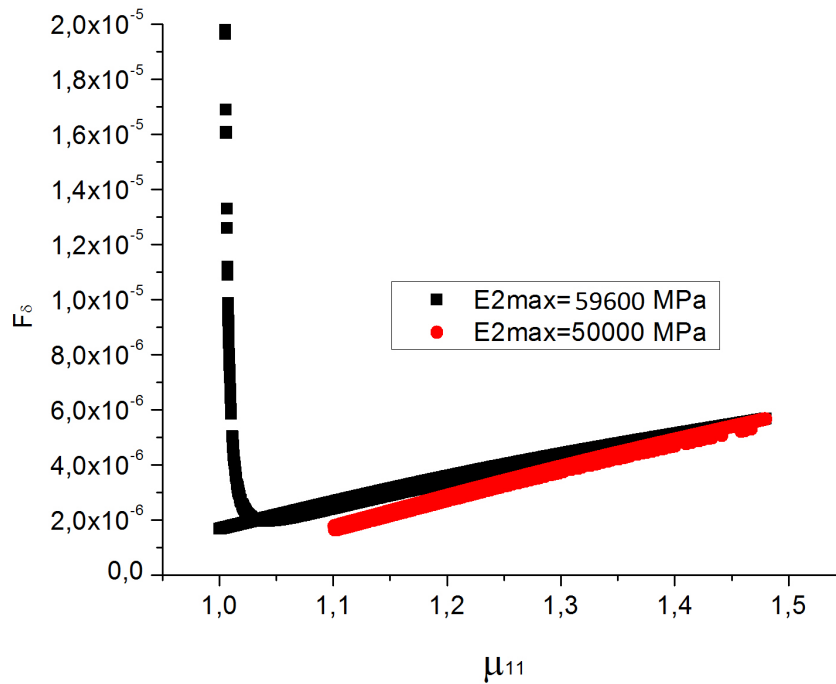


FIGURA 33 – GRÁFICO REPRESENTATIVO DA INSTABILIDADE DO SISTEMA.

Portanto, pode-se concluir que, ao utilizar o Método de Monte Carlo para o caso anisotrópico, é necessário verificar se os resultados obtidos geram instabilidade numérica no sistema. Para o caso analisado, foi confirmado que enquanto o valor do módulo na direção 1 vale 60000 MPa o valor máximo que o módulo na direção 2 pode atingir é de 50000 MPa. Vale

a pena ressaltar que foram realizados testes com acréscimo de 1000 MPa, com o parâmetro E_2 variando de 50000 MPa até 60000 MPa.

A tabela 12 apresenta os parâmetros da rocha resultantes para o caso em que a região de ruptura foi maior dentre os 10000 testes analisados.

TABELA 12 – PARÂMETROS RESULTANTES PARA O CASO COM MAIS PONTOS DE RUPTURA.

	Variável	5ª Situação	6ª Situação	7ª Situação
Anisotrópico	E_2 (MPa)	30013,73	30008,88	30087,69
	mi	26	26	26
	GSI	70	70	70
	σ_c (MPa)	150	150	150
	σ_1 (MPa)	68,73	82,47	95,89
	σ_3 (MPa)	17,49	20,99	24,41
Isotrópico	mi	26	26	26
	GSI	70	70	70
	σ_c (MPa)	150	150	150
	σ_1 (MPa)	68,73	82,49	96,23
	σ_3 (MPa)	17,49	20,99	24,49

As figuras 34 e 35 ilustram os diagramas de tensões obtidos da análise que gerou a região mais crítica da 5ª Situação, obtida com o critério de Hoek-Brown, dentre os 10000 testes que foram realizados.

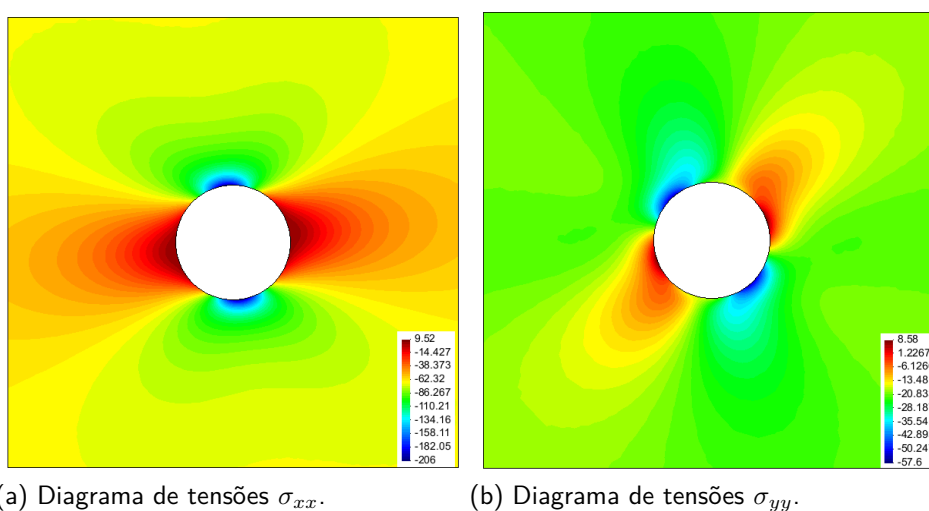
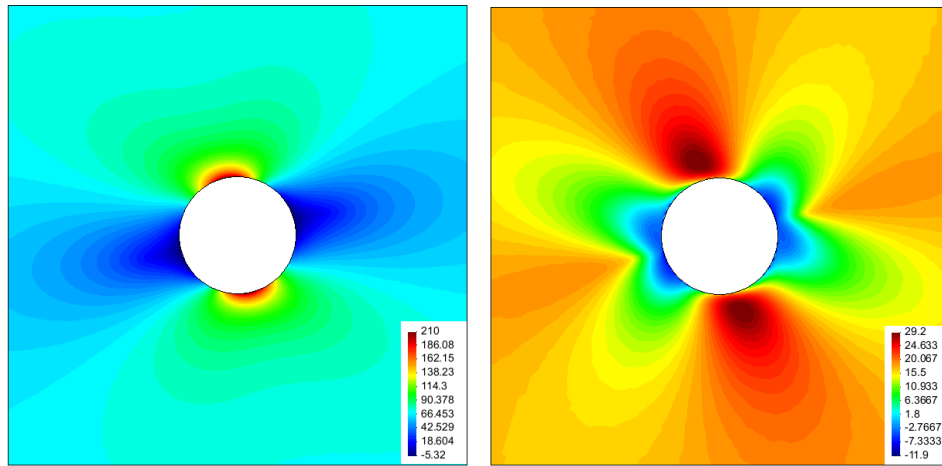
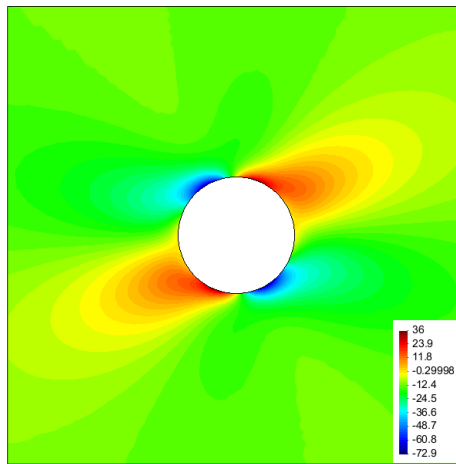


FIGURA 34 – RESULTADOS DAS TENSÕES (σ_{xx} , σ_{yy}) OBTIDOS DA ANÁLISE COM MAIS PONTOS DE RUPTURA PARA A 5ª SITUAÇÃO.



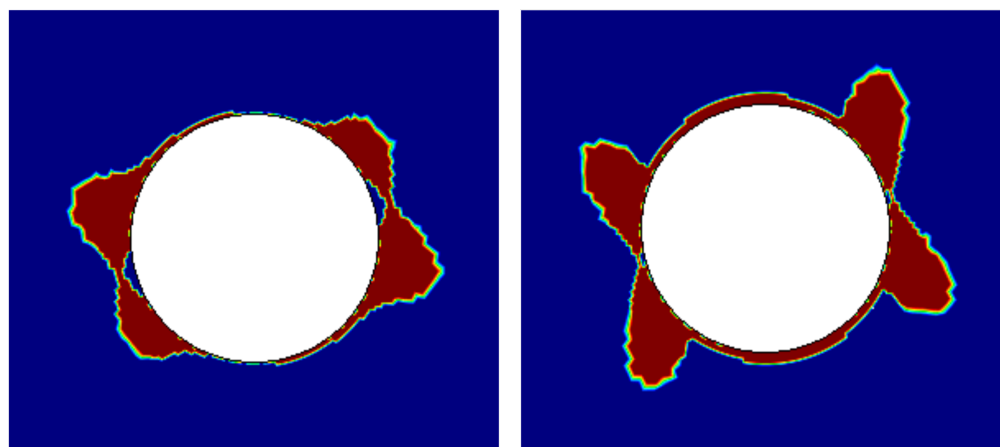
(a) Diagrama de tensões principais maiores (σ_1). (b) Diagrama de tensões principais menores (σ_3).



(c) Diagrama de tensões σ_{xy} .

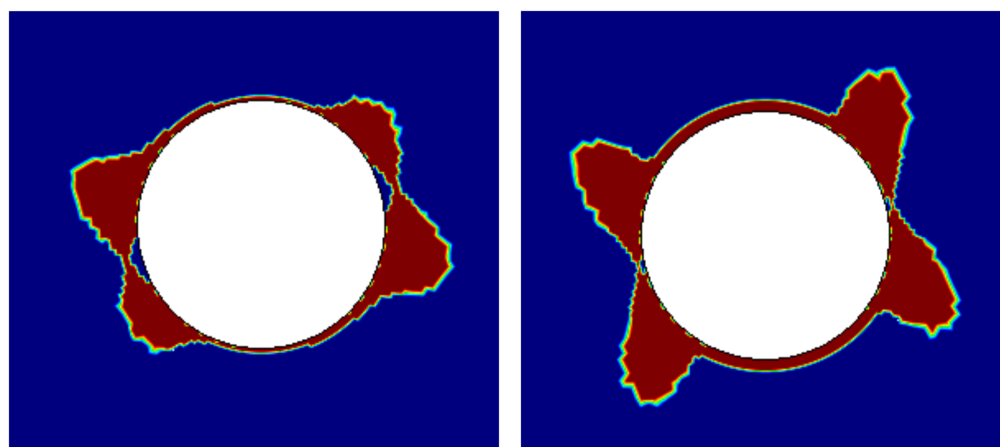
FIGURA 35 – RESULTADOS DAS TENSÕES (σ_1 , σ_3 , σ_{xy}) OBTIDOS DA ANÁLISE COM MAIS PONTOS DE RUPTURA PARA A 5ª SITUAÇÃO.

A figura 36 apresenta as regiões de ruptura obtidas em cada situação da tabela 12 tanto para o caso anisotrópico quanto isotrópico utilizando elementos constantes. A partir destes resultados é possível observar que à medida que as tensões *in situ* aplicadas no modelo aumentam, as áreas de ruptura também aumentam.



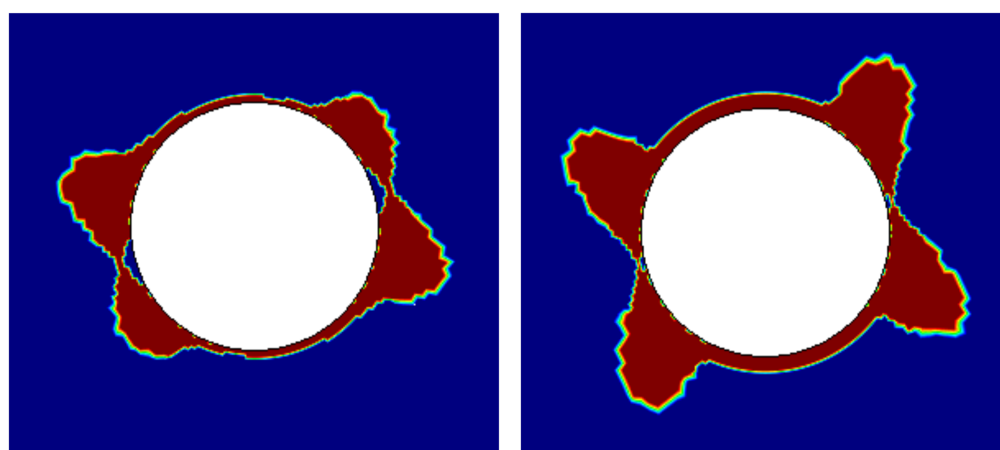
(a) Caso 5 anisotrópico.

(b) Caso 5 isotrópico.



(c) Caso 6 anisotrópico.

(d) Caso 6 isotrópico.



(e) Caso 7 anisotrópico.

(f) Caso 7 isotrópico.

FIGURA 36 – REGIÕES DE RUPTURA RESULTANTES DAS ANÁLISES COM O CRITÉRIO DE HOEK-BROWN.

As imagens da figura 37 apresentam o contorno das regiões de ruptura de cada situação, sendo o traçado vermelho referente à sétima situação, o verde à sexta situação e o azul à quinta situação.

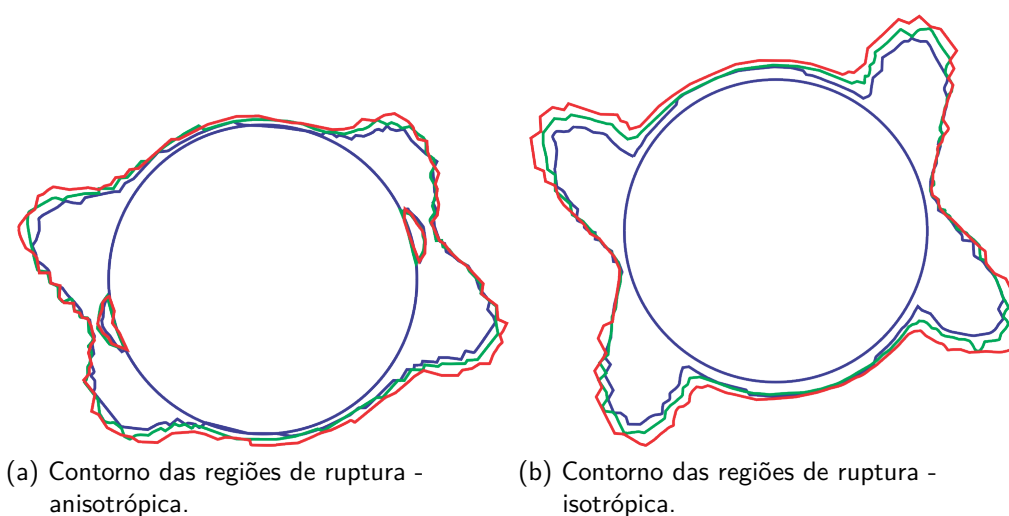


FIGURA 37 – CONTORNO DAS REGIÕES DE RUPTURA ISOTRÓPICA E ANISOTRÓPICA PARA AS SITUAÇÕES 5, 6 E 7.

Ainda na figura 36, é possível observar que os resultados gerados pela formulação anisotrópica geraram uma disformidade na zona de ruptura quando comparado ao caso isotrópico. Isto acontece devido à orientação de 14 graus das tensões *in situ* que acaba influenciando os planos de anisotropia. Para uma melhor visualização deste fato, apresenta-se a figura 38a que ilustra a disformidade da região de ruptura por meio da sobreposição das regiões isotrópica (contorno em branco) e anisotrópica (contorno em amarelo) para a 7ª Situação. Para melhor representar essa disformidade tem-se a figura 38b onde o traçado em vermelho representa o caso isotrópico e o verde o caso anisotrópico. Colocando ambas imagens no AutoCad, foi possível obter a área proporcional de cada região, ou seja, a área da região isotrópica ultrapassa a anisotrópica em 13,27%.

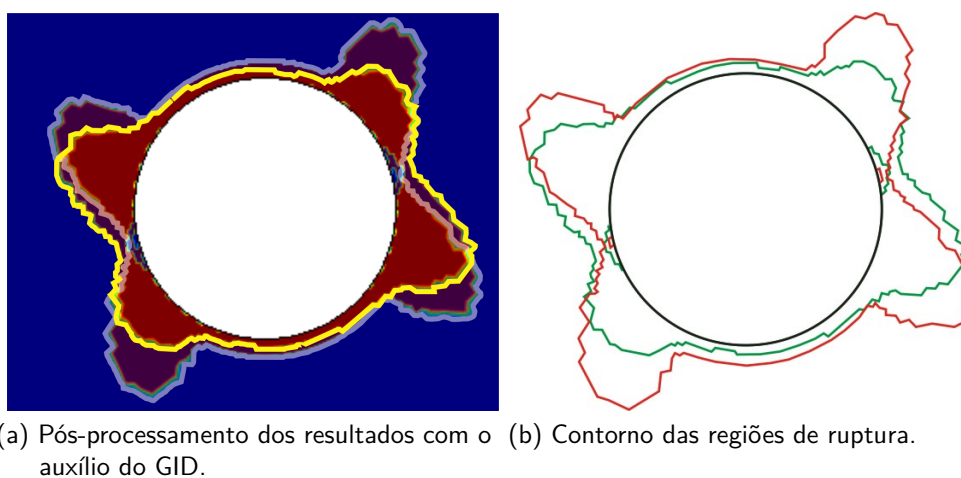


FIGURA 38 – SOBREPOSIÇÃO DAS REGIÕES DE RUPTURA ISOTRÓPICA E ANISOTRÓPICA PARA A 7ª SITUAÇÃO.

A figura 39 ilustra algumas situações pertinentes para discussão. O caso da figura 39a,

por exemplo, ilustra a sobreposição das situações 5, 6 e 7 sendo que o sétimo caso, por ter sido aplicado $\pm 75\%$ do valor médio da tensão *in situ*, apresentou a maior região de ruptura; já o quinto caso apresentou a menor área de ruptura. Já a figura 39b serve para ilustrar que, quanto maior for o número de amostras, maior é a região de ruptura resultante. Entretanto, há uma limitação no número de amostras para este caso, pois quando são testadas 1000 e 10000 amostras (sobreposição da figura 39c) a diferença não é perceptível e, por este motivo, é mostrada a figura 39d, com o resultado para 1000 amostras.

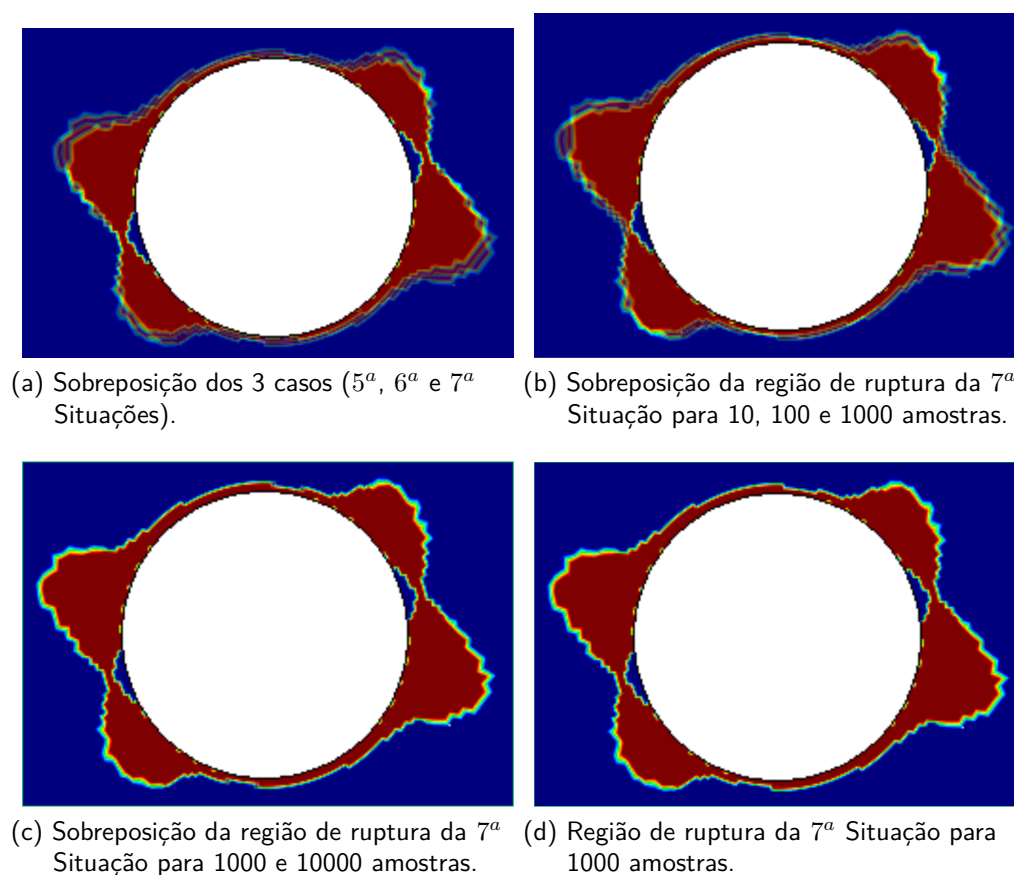


FIGURA 39 – SOBREPOSIÇÃO DE ALGUMAS REGIÕES DE RUPTURA PARA COMPARAÇÃO.

Para contabilizar uma aproximação da probabilidade de ruptura adotou-se a seguinte metodologia:

1. Primeiramente fez-se a contabilização dos pontos de contorno rompidos;
2. Dividiu-se o número de pontos rompidos pelo número de elementos do contorno resultando num percentual de ruptura no contorno;
3. Efetuou-se o cálculo da área de domínio rompida;
4. Para facilidade de pós-processamento adotou-se uma malha de pontos internos em que os pontos mais próximos estão distantes 3cm dos elementos de contorno;

5. Fez-se a normalização da área rompida pela área de escavação do túnel (ARN). Além disso, acrescentou-se o percentual rompido no contorno multiplicado pela diferença entre as áreas.

Na sequência, são apresentados os gráficos (ver figuras: 40, 41 e 42) da probabilidade de ruptura resultante de 10000 análises de Monte Carlo obtidos para o caso isotrópico.

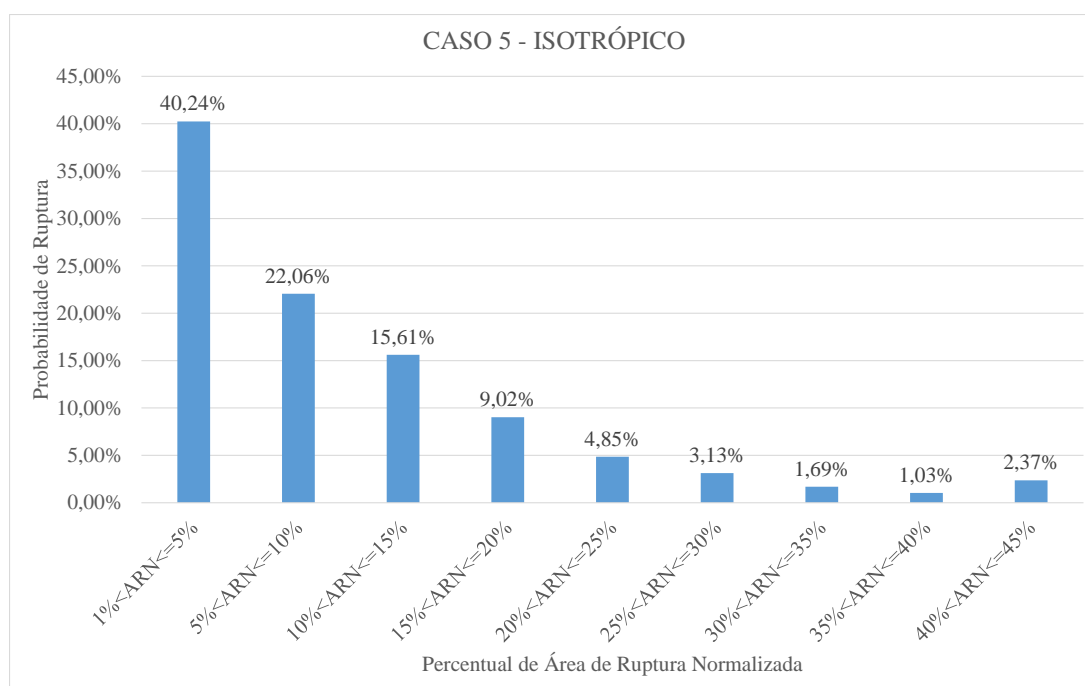


FIGURA 40 – PROBABILIDADE DE RUPTURA PARA O CASO 5 ISOTRÓPICO EM 10000 ANÁLISES.

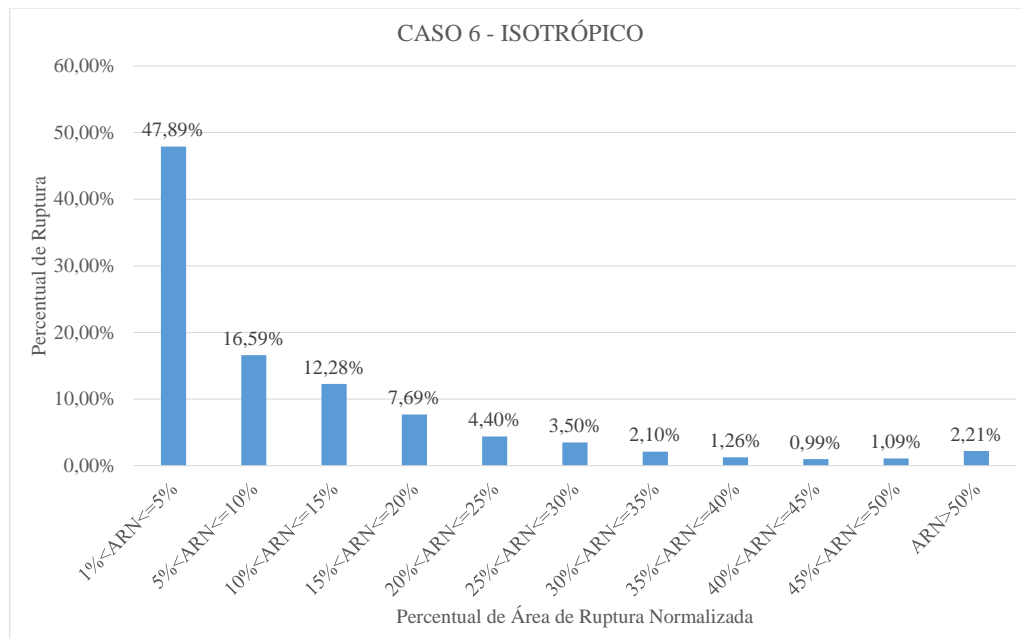


FIGURA 41 – PROBABILIDADE DE RUPTURA PARA O CASO 6 ISOTRÓPICO EM 10000 ANÁLISES.

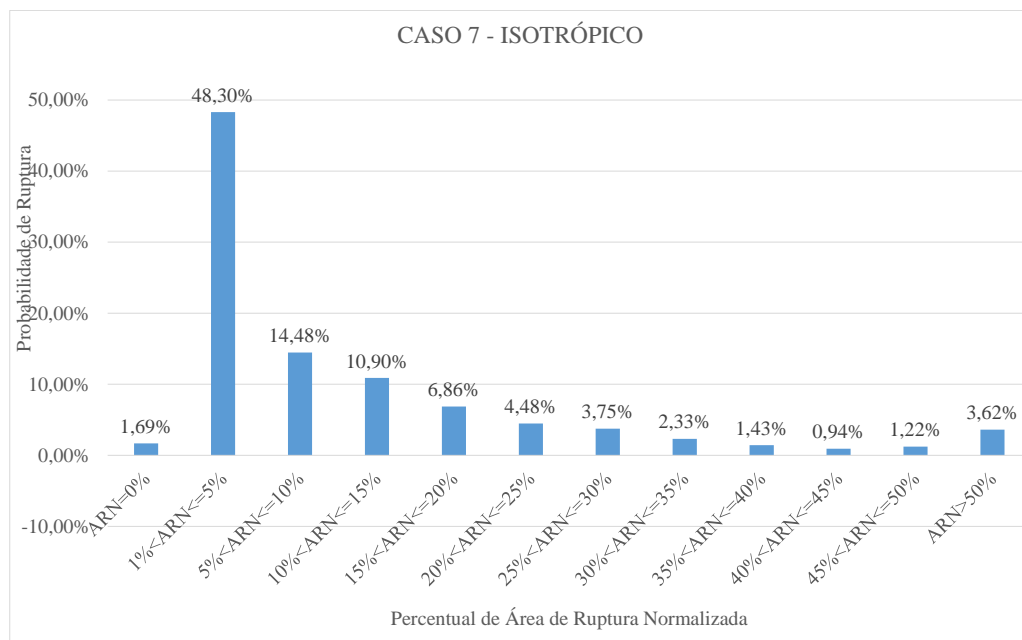


FIGURA 42 – PROBABILIDADE DE RUPTURA PARA O CASO 7 ISOTRÓPICO EM 10000 ANÁLISES.

Comparando as três distribuições presentes nas figuras 40, 41 e 42, percebe-se que a

maior área de ruptura concentra-se no intervalo entre 1 e 5% da área total da cavidade sendo o percentual superior a 40%. Dentre as combinações utilizadas, conclui-se que quanto maior é o intervalo das tensões *in situ*, por exemplo na 7ª situação, maior é a probabilidade de haver uma ruptura superior à 50% da área da cavidade.

Os gráficos das figuras 43, 44, 45 ilustram os percentuais de ruptura para o modelo anisotrópico ocorridos em 10000 análises de Monte Carlo. Assim como caso isotrópico, o modelo anisotrópico também apresentou maior percentual de ruptura concentrado no intervalo entre 1% e 5% da área de escavação.

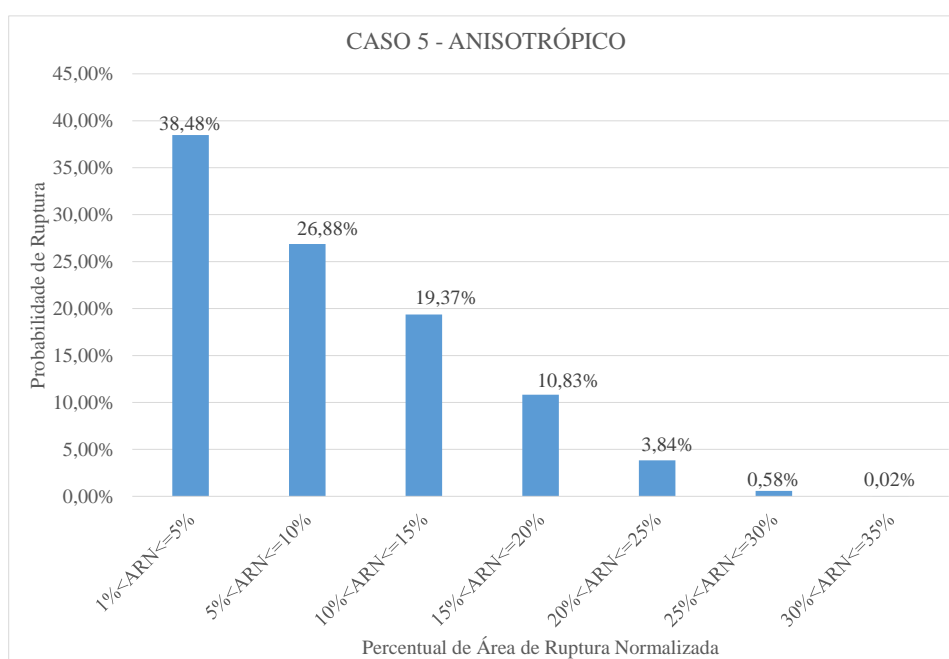


FIGURA 43 – PROBABILIDADE DE RUPTURA PARA O CASO 5 ANISOTRÓPICO EM 10000 ANÁLISES.

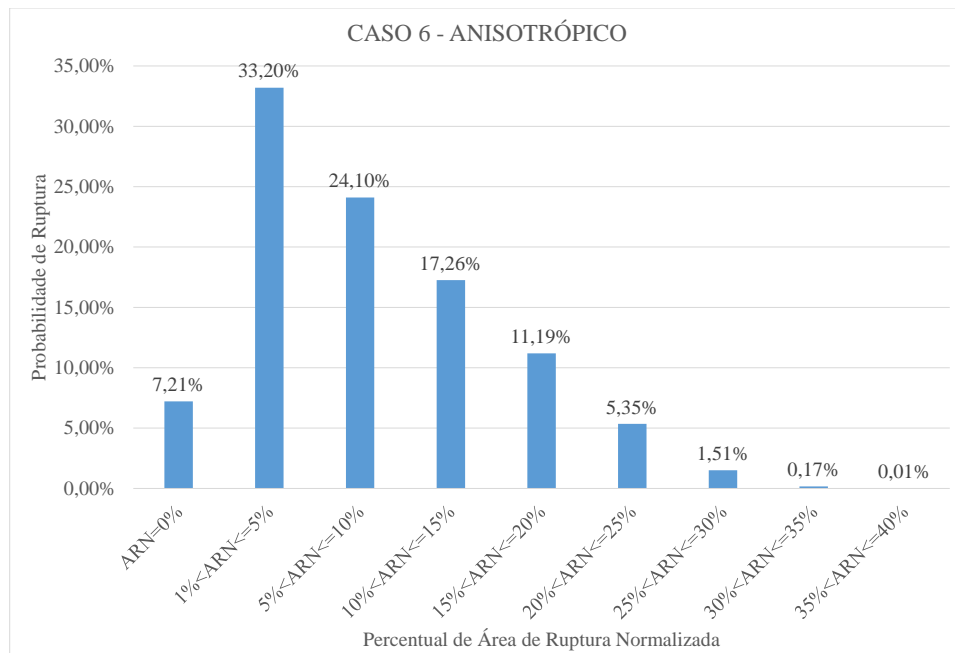


FIGURA 44 – PROBABILIDADE DE RUPTURA PARA O CASO 6 ANISOTRÓPICO EM 10000 ANÁLISES.

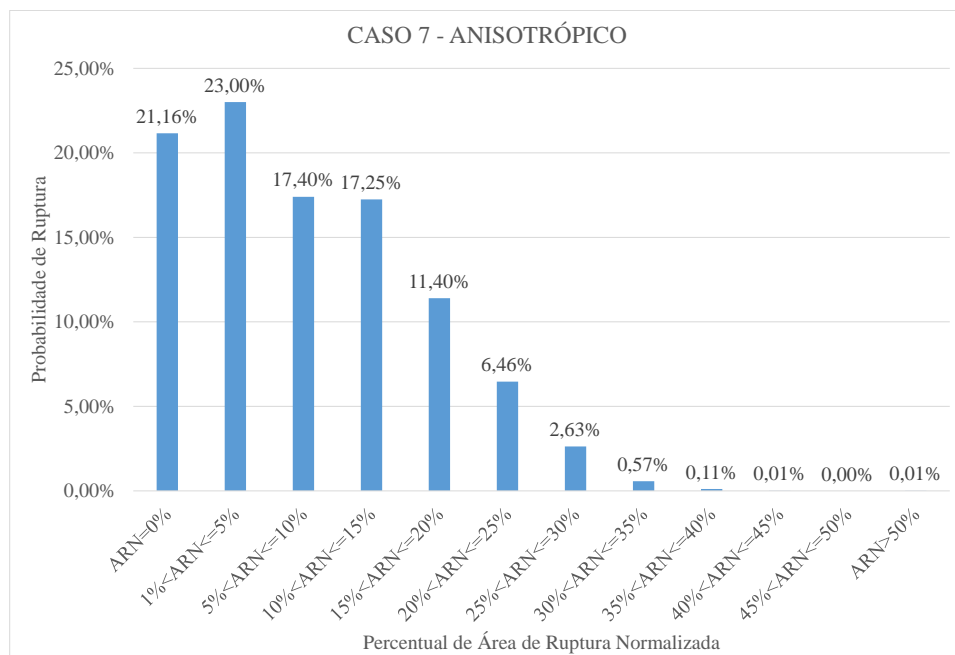


FIGURA 45 – PROBABILIDADE DE RUPTURA PARA O CASO 7 ANISOTRÓPICO EM 10000 ANÁLISES.

A tabela 13 apresenta um resumo dos resultados contidos nos gráficos de probabilidade

para os modelos isotrópicos e anisotrópicos para os casos 5, 6 e 7. Ao comparar ambos os modelos, é possível concluir que a probabilidade de ocorrer ruptura acima de 10% da abertura da cavidade, dentre as 10000 análises geradas, corresponde a uma média percentual de 36,22. Neste caso, ao avaliar os resultados pode-se dizer que o modelo isotrópico foi mais conservador que o anisotrópico, porém estes valores são tão pequenos e dependem da variabilidade dos parâmetros da rocha que não se pode tomar uma atitude baseada apenas nisto para definir qual tipo de material deve-se utilizar para a modelagem de um túnel.

TABELA 13 – QUADRO DA PROBABILIDADE DE RUPTURA OCORRIDA NOS MODELOS ISOTRÓPICOS E ANISOTRÓPICOS PARA OS CASOS 5, 6 E 7.

	CASO	$P_{ARN}>50\%$	$P_{ARN}>40\%$	$P_{ARN}>30\%$	$P_{ARN}>20\%$	$P_{ARN}>10\%$
Iso.	5	0,00%	0,00%	5,09%	13,07%	37,70%
	6	3,62%	3,30%	7,65%	15,55%	35,52%
	7	3,62%	5,78%	9,54%	17,77%	35,53%
Aniso.	5	0,00%	0,00%	0,02%	4,44%	34,64%
	6	0,00%	0,01%	0,18%	7,04%	35,49%
	7	0,01%	0,01%	0,70%	9,79%	38,44%

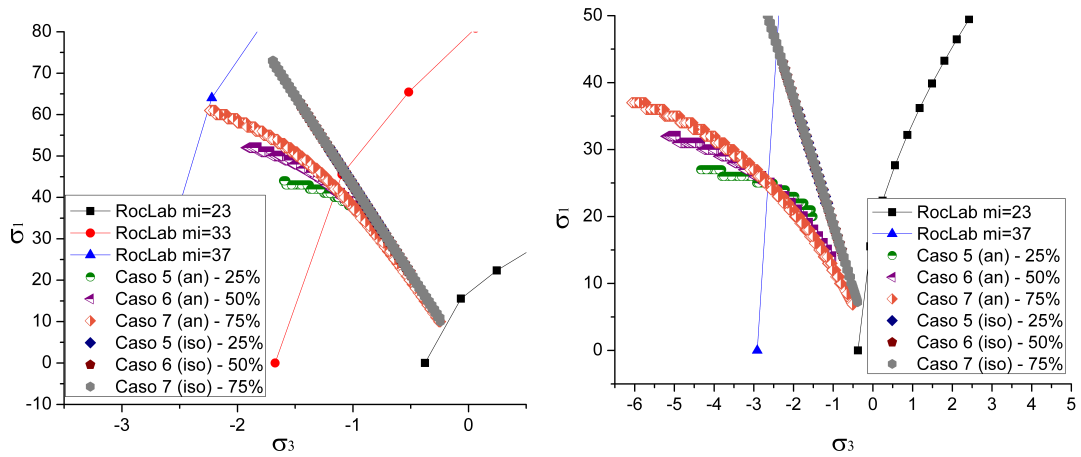
Na sequência são apresentados os gráficos das tensões principais menores versus as tensões principais maiores dos pontos escolhidos (figura 31a) para ilustrar os resultados de 10000 amostras. Para o traçado das curvas de m_i utilizou-se o software RocLab sendo que os parâmetros utilizados para cada curva são apresentados na tabela 14.

TABELA 14 – PARÂMETROS UTILIZADOS NO PROGRAMA ROCLAB PARA O TRAÇADO DAS CURVAS DE m_i .

m_i	GSI	σ_{ci} (MPa)	D	E (MPa)
21	62,50	105,02	0	60000
23	65,08	120,46	0	60000
25	68,35	140,12	0	60000
27	71,67	160,02	0	60000
29	75,00	180,03	0	60000
32	80,00	210,00	0	60000
33	81,67	220,00	0	60000
37	88,34	260,00	0	60000
39	91,67	280,00	0	60000
42	96,71	310,27	0	60000

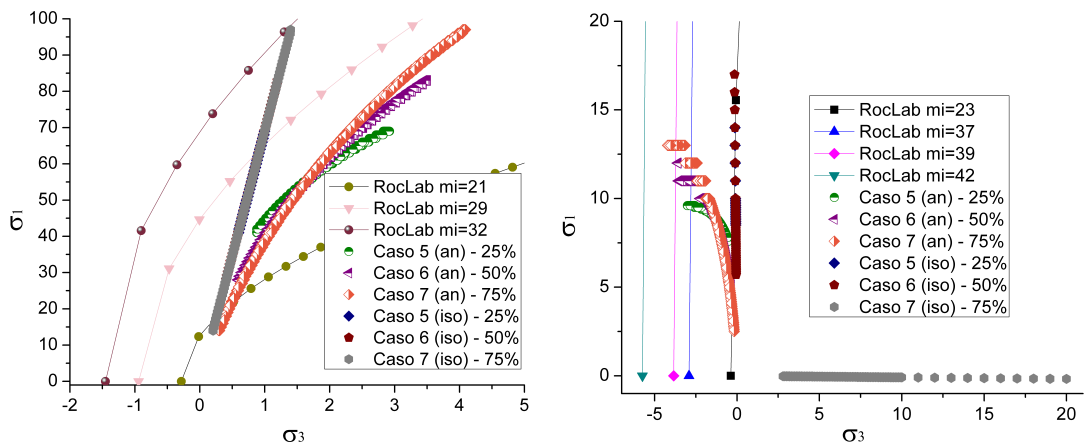
Nos gráficos da figura 46, é possível observar que os resultados anisotrópicos apresentaram um comportamento não linear quando comparados aos isotrópicos. Outro fato importante a ser relatado nesses gráficos é que, à medida que a tensão *in situ* aumenta, as regiões de ruptura aumentam proporcionalmente. No gráfico da figura 46d, é possível concluir que, para qualquer curva de m_i , não há ruptura no caso isotrópico. Contudo, nem sempre as modelagens isotrópicas são mais conservadoras que as anisotrópicas em todos os pontos do domínio. Isto

pode ser visualizado nos gráficos das figuras 46b e 46d onde mais amostras ficaram fora da região aceitável perante o modelo de Hoek-Brown.



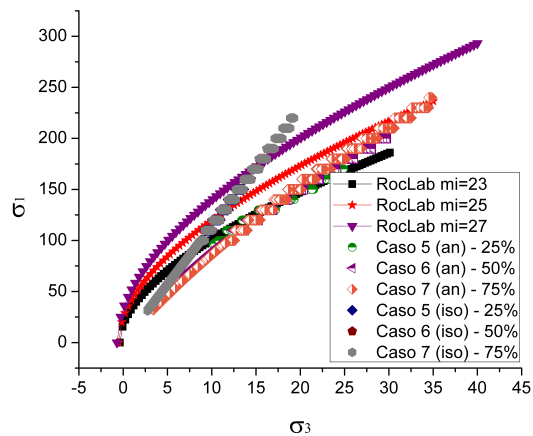
(a) Ponto A - 1901.

(b) Ponto B - 3278.



(c) Ponto C - 3669.

(d) Ponto D - 4466.



(e) Ponto E - 4779.

FIGURA 46 – GRÁFICOS DA TENSÕES PRINCIPAIS σ_3 (MPa) \times σ_1 (MPa).

5.5.2 Testes com Valores Fixos para os Parâmetros do Maciço Rochoso

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos com os modelos apresentados na tabela 15. O destaque para estes testes está em verificar as regiões de ruptura resultantes ao se utilizar a variação de $\pm 25 \%$, $\pm 50 \%$ e $\pm 75 \%$ sobre o valor médio das tensões *in situ* em cada direção (σ_1 e σ_3).

TABELA 15 – DADOS DE ENTRADA PARA O CASO ANISOTRÓPICO COM OS PARÂMETROS DA ROCHA FIXOS.

	Variável	Mínimo	Máximo	TD ¹	Desvio Padrão	Média
8ª Situação	E_1 (MPa)	60000	60000	-	-	-
	E_2 (MPa)	30000	50000	-	-	-
	ν	0,20	0,20	-	-	-
	σ_3 (MPa)	10,50	17,50	1	-	-
	σ_1 (MPa)	41,25	68,75	1	-	-
	GSI	80	80	-	-	-
	mi	32	32	-	-	-
	θ (°)	14	14	-	-	-
	σ_c (MPa)	210	210	-	-	-
	Distância (m)	0	0	-	-	-
	Dano	0	0	-	-	-
9ª Situação	E_1 (MPa)	60000	60000	-	-	-
	E_2 (MPa)	30000	50000	-	-	-
	ν	0,20	0,20	-	-	-
	σ_3 (MPa)	7	21	1	-	-
	σ_1 (MPa)	27,5	82,5	1	-	-
	GSI	80	80	-	-	-
	mi	32	32	-	-	-
	θ (°)	14	14	-	-	-
	σ_c (MPa)	210	210	-	-	-
	Distância (m)	0	0	-	-	-
	Dano	0	0	-	-	-
10ª Situação	E_1 (MPa)	60000	60000	-	-	-
	E_2 (MPa)	30000	50000	-	-	-
	ν	0,20	0,20	-	-	-
	σ_3 (MPa)	3,5	24,5	1	-	-
	σ_1 (MPa)	13,75	96,25	1	-	-
	GSI	80	80	-	-	-
	mi	32	32	-	-	-
	θ (°)	14	14	-	-	-
	σ_c (MPa)	210	210	-	-	-
	Distância (m)	0	0	-	-	-
	Dano	0	0	-	-	-

¹ TD: tipo de distribuição: 1 uniforme; 2 normal.

TABELA 16 – PARÂMETROS RESULTANTES PARA O CASO COM MAIS PONTOS DE RUPTURA.

	Variável	8ª Situação	9ª Situação	10ª Situação
Aniso.	E_2 (MPa)	30016,57	30051,00	30095,33
	σ_1 (MPa)	68,73	82,36	95,86
	σ_3 (MPa)	17,49	20,96	24,40
Iso.	σ_1 (MPa)	68,70	82,13	96,24
	σ_3 (MPa)	17,49	20,90	24,50

As figuras 47 e 48 ilustram as regiões de ruptura resultantes, com o Critério de Hoek-Brown, para cada situação da formulação anisotrópica e isotrópica sendo que os parâmetros são apresentados na tabela 16. Analisando as imagens das figuras 47 e 48 não é possível perceber que, com o aumento das tensões *in situ*, a região de ruptura também aumenta. Portanto, para isto, é apresentada a figura 49 que ilustra a sobreposição das três situações sendo a décima situação a mais crítica e a oitava a menos crítica.

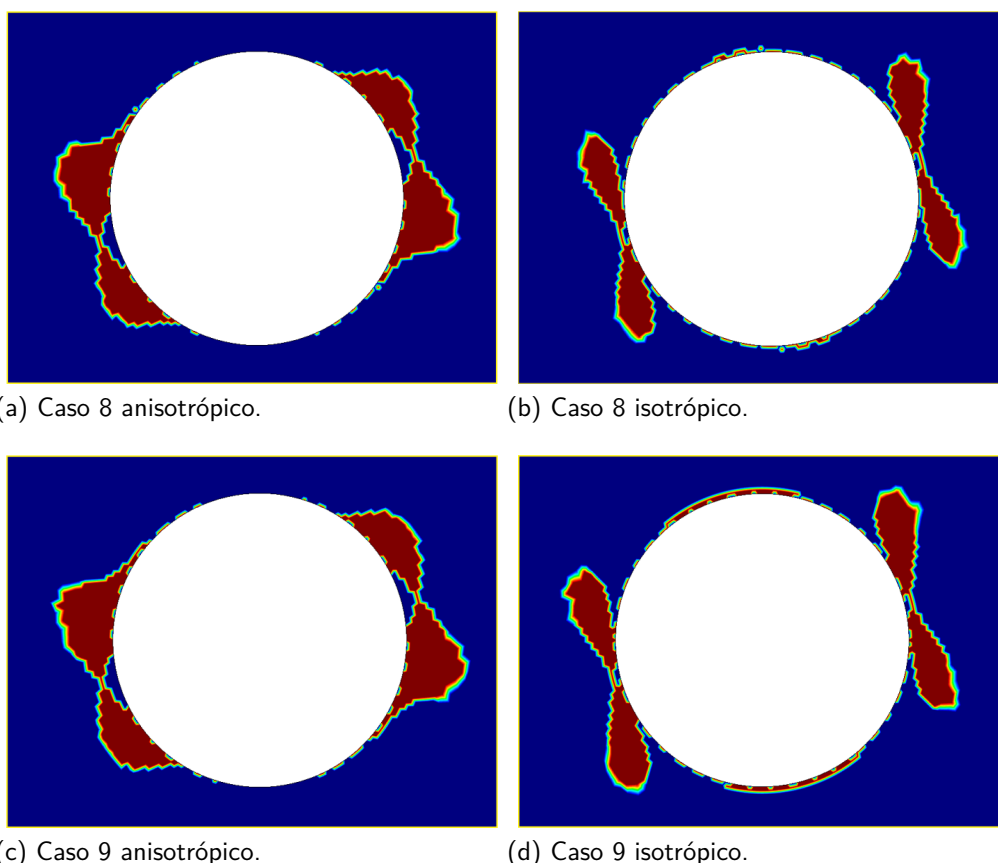
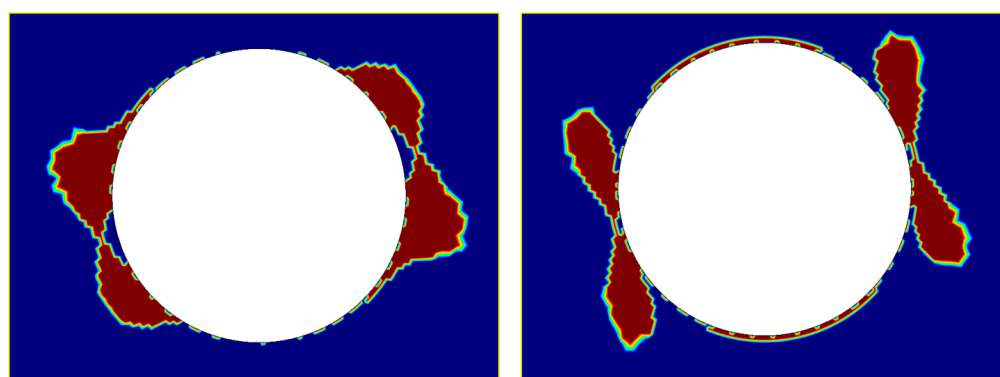


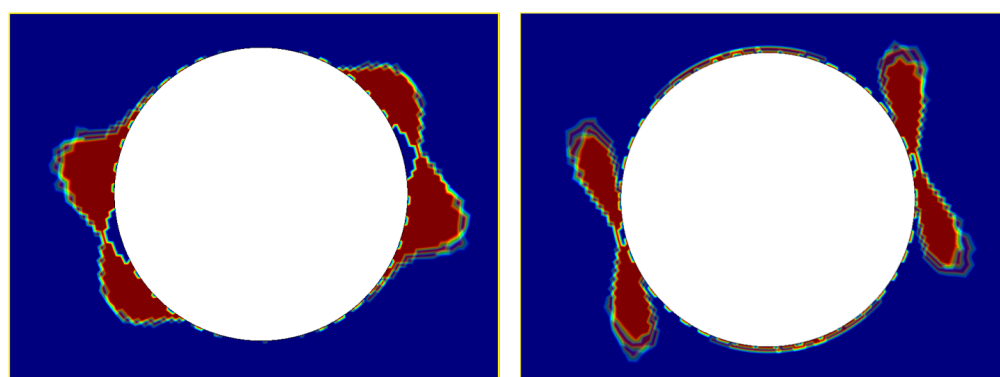
FIGURA 47 – REGIÕES DE RUPTURA RESULTANTES DAS ANÁLISES COM O CRITÉRIO DE HOEK-BROWN PARA OS CASOS MAIS CRÍTICOS DA OITAVA E NONA SITUAÇÕES.



(a) Caso 10 anisotrópico.

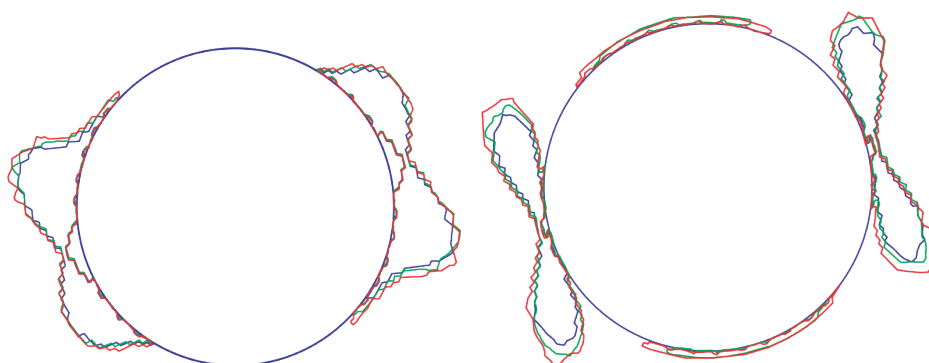
(b) Caso 10 isotrópico.

FIGURA 48 – REGIÕES DE RUPTURA RESULTANTES DAS ANÁLISES COM O CRITÉRIO DE HOEK-BROWN PARA OS CASOS MAIS CRÍTICOS DA DÉCIMA SITUAÇÃO.



(a) Formulação anisotrópica.

(b) Formulação isotrópica.

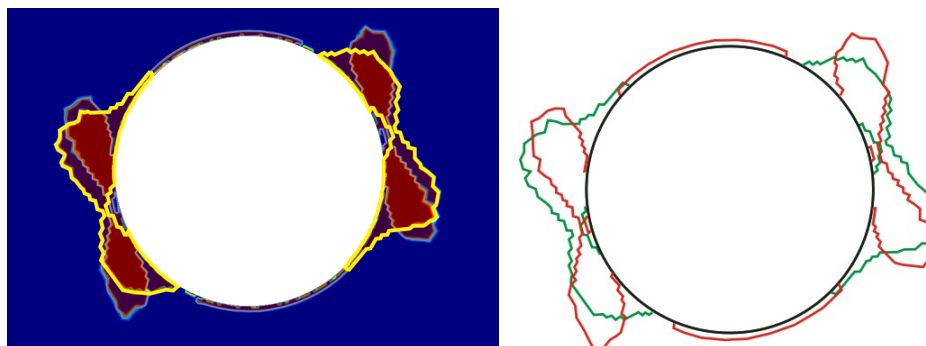


(c) Contorno dos resultados anisotrópicos. (d) Contorno dos resultados isotrópicos.

FIGURA 49 – SOBREPOSIÇÃO DAS TRÊS REGIÕES DE RUPTURA REFERENTES ÀS SITUAÇÕES 8, 9 E 10.

Na figura 50 é apresentada a sobreposição do caso mais crítico (10ª Situação) dentre os três testes realizados. O traçado em vermelho da figura 50b foi resultante da formulação isotrópica enquanto que o traçado em verde da formulação anisotrópica. Em termos percentuais, a região obtida para o caso anisotrópico foi superior em 0,75 % quando comparado ao isotrópico, ou seja, em termos de área a diferença não foi significativa. Porém, em termos de distribuição,

pode-se dizer que a formulação anisotrópica teve uma concentração de pontos rompidos em algumas regiões além de resultar numa axissimetria relacionada às áreas. Já para a formulação isotrópica, a região de ruptura resultante foi simétrica.



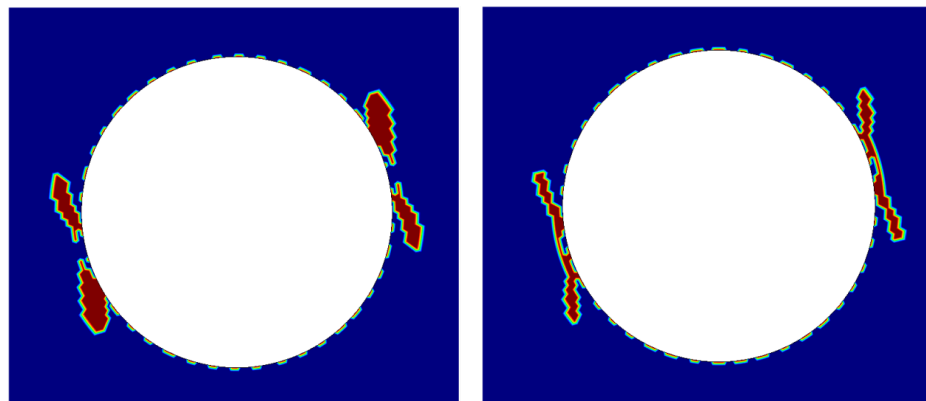
(a) Pós-processamento dos resultados com o auxílio do GID. (b) Contorno das regiões de ruptura.

FIGURA 50 – SOBREPOSIÇÃO DAS REGIÕES DE RUPTURA ISOTRÓPICA E ANISOTRÓPICA PARA A 10ª SITUAÇÃO.

A seguir, são apresentados na tabela 17 os parâmetros resultantes para os casos em que ocorreram menos pontos de ruptura dentre as 10000 análises efetuadas. Nesse caso, algo interessante aconteceu, pois a região mais crítica (para menos pontos de ruptura) foi resultante da 8ª Situação, ou seja, ao contrário do que aconteceu no caso com mais pontos de ruptura. Além disso, a décima situação não gerou pontos de ruptura.

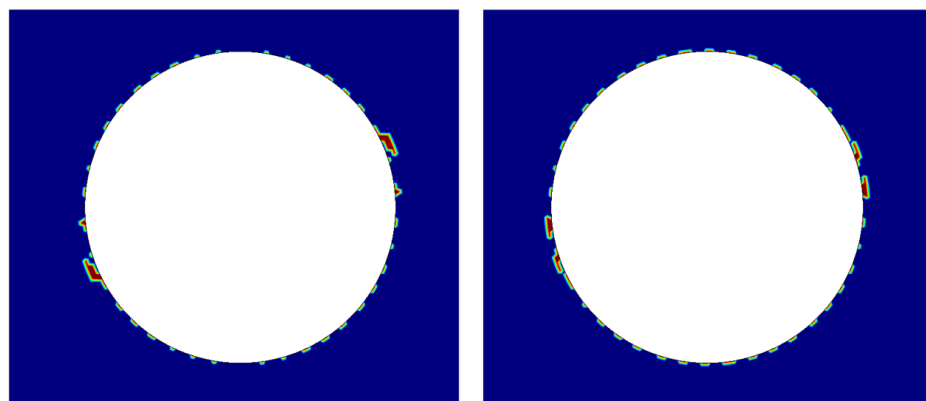
TABELA 17 – PARÂMETROS RESULTANTES PARA O CASO COM MENOS PONTOS DE RUPTURA PARA AS FORMULAÇÕES ANISOTRÓPICAS E ISOTRÓPICAS.

	Variável	8ª Situação	9ª Situação	10ª Situação
Aniso.	E_2 (MPa)	49988,19	49996,46	49984,18
	σ_1 (MPa)	41,27	27,51	13,82
	σ_3 (MPa)	10,50	7,00	3,52
Iso.	σ_1 (MPa)	41,27	28,00	13,75
	σ_3 (MPa)	10,50	7,13	3,50



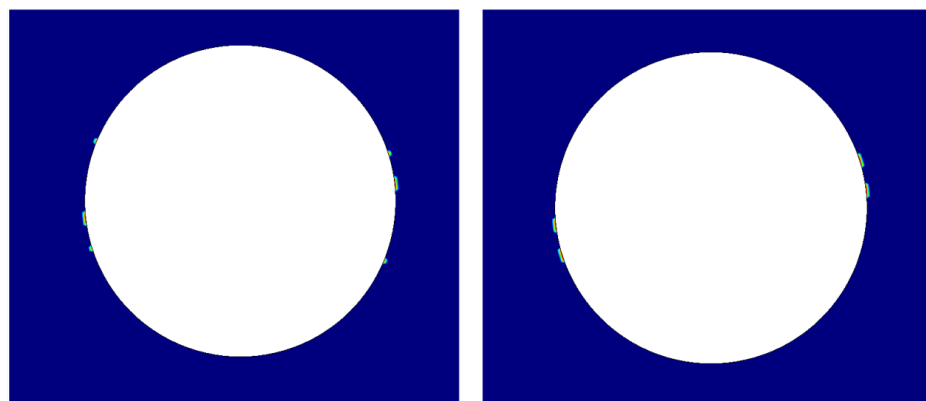
(a) Caso 8 anisotrópico.

(b) Caso 8 isotrópico.



(c) Caso 9 anisotrópico.

(d) Caso 9 isotrópico.



(e) Caso 10 anisotrópico.

(f) Caso 10 isotrópico.

FIGURA 51 – REGIÕES DE RUPTURA RESULTANTES DAS ANÁLISES COM O CRITÉRIO DE HOEK-BROWN PARA OS CASOS MENOS CRÍTICOS.

Adotando o mesmo procedimento apresentado na seção anterior, foi possível obter a probabilidade de ruptura para os casos 8, 9 e 10 conforme ilustram os gráficos das figuras 52, 53 e 54 do modelo isotrópico.

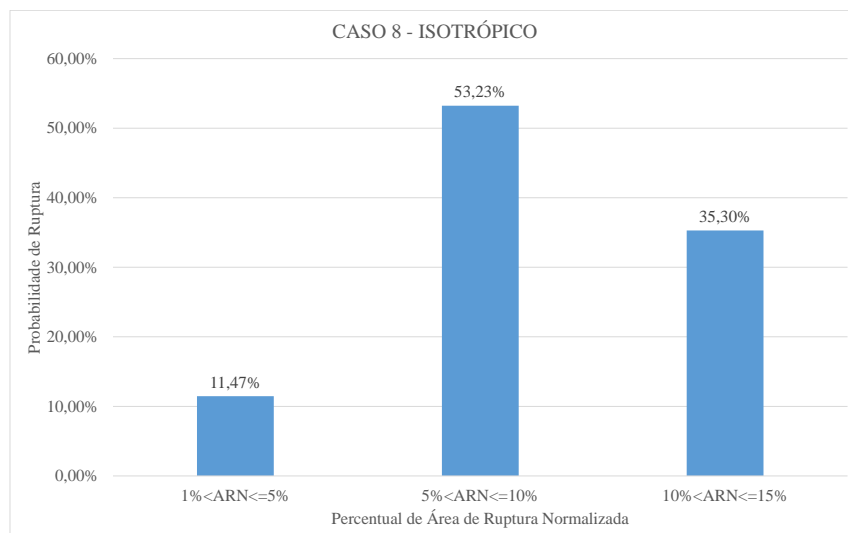


FIGURA 52 – PROBABILIDADE DE RUPTURA PARA O CASO 8 ISOTRÓPICO EM 10000 ANÁLISES.

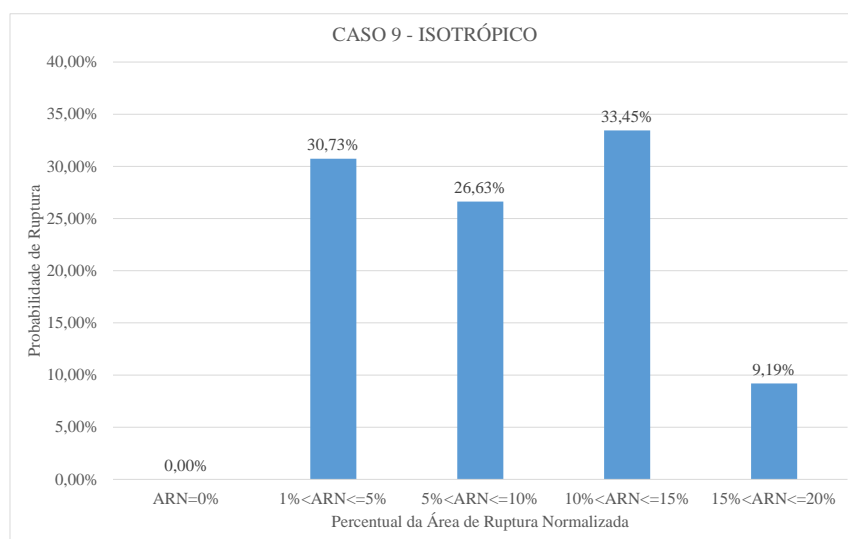


FIGURA 53 – PROBABILIDADE DE RUPTURA PARA O CASO 9 ISOTRÓPICO EM 10000 ANÁLISES.

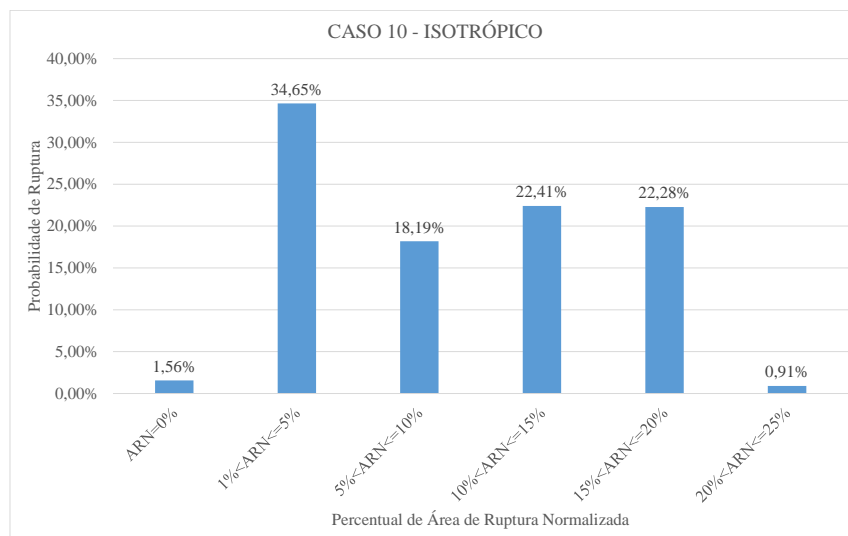


FIGURA 54 – PROBABILIDADE DE RUPTURA PARA O CASO 10 ISOTRÓPICO EM 10000 ANÁLISES.

Para o modelo anisotrópico, onde os parâmetros do maciço foram considerados constantes, os resultados para probabilidade de ruptura podem ser visualizados nas figuras 55, 56 e 57. Nestas distribuições, percebe-se que a área de ruptura ficou concentrada entre 15% e 25 % da área de escavação do túnel diferentemente do que ocorreu nos casos isotrópicos.

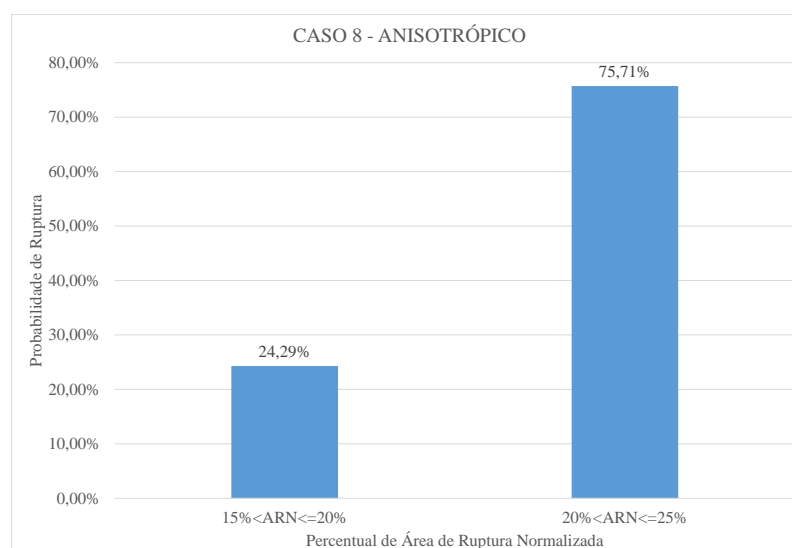


FIGURA 55 – PROBABILIDADE DE RUPTURA PARA O CASO 8 ANISOTRÓPICO EM 10000 ANÁLISES.

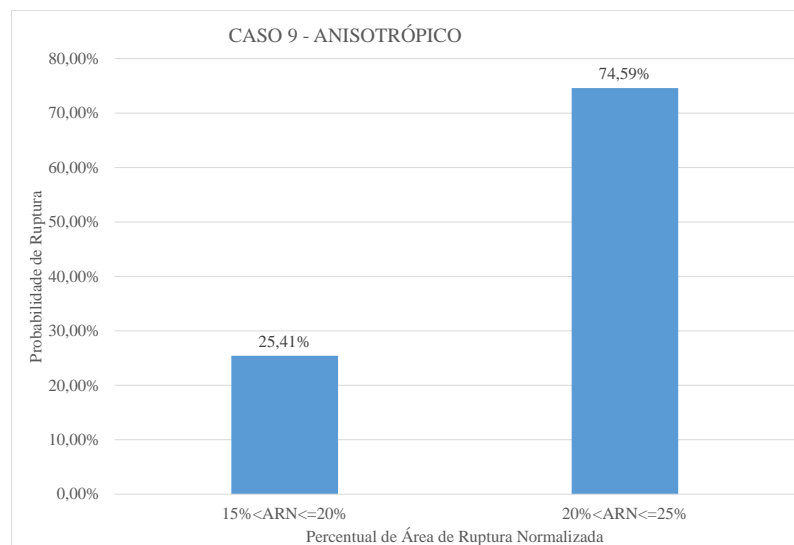


FIGURA 56 – PROBABILIDADE DE RUPTURA PARA O CASO 9 ANISOTRÓPICO EM 10000 ANÁLISES.

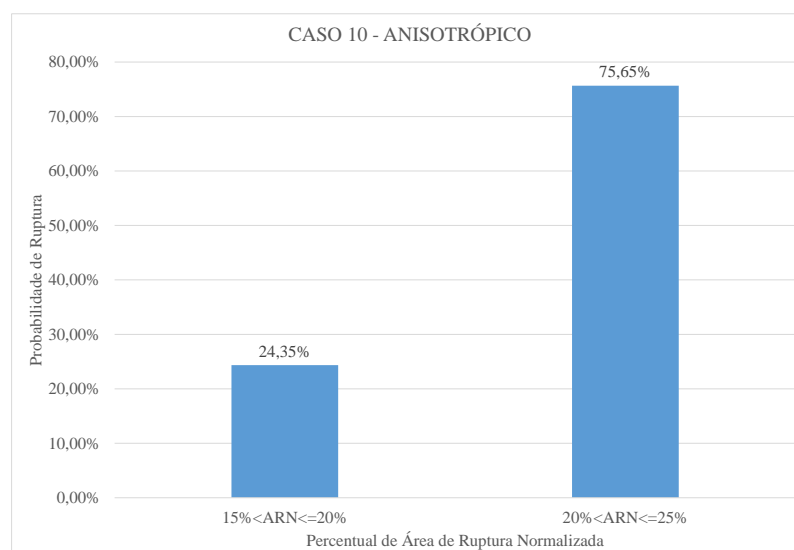


FIGURA 57 – PROBABILIDADE DE RUPTURA PARA O CASO 10 ANISOTRÓPICO EM 10000 ANÁLISES.

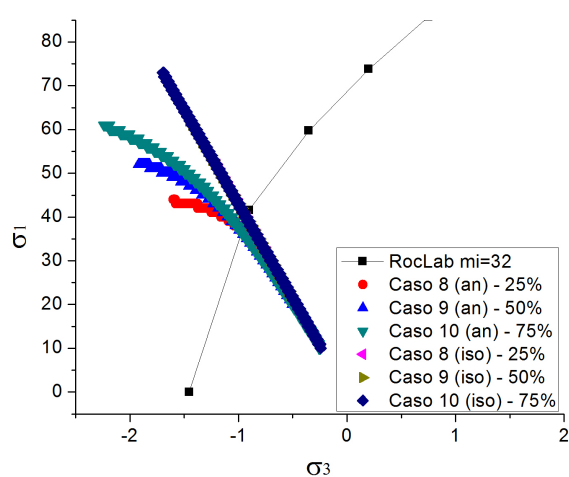
A tabela 18 apresenta um quadro resumo da probabilidade de ruptura ocorrida nos modelos isotrópicos e anisotrópicos para os casos 8, 9 e 10. Ao analisar os resultados pode-se afirmar que o modelo anisotrópico foi mais conservador que o isotrópico devido à probabilidade da área de ruptura normalizada ser superior ao caso isotrópico, ou seja, a ocorrência de rupturas superiores a 15% é total.

TABELA 18 – QUADRO DA PROBABILIDADE DE RUPTURA OCORRIDA NOS MODELOS ISOTRÓPICOS E ANISOTRÓPICOS PARA OS CASOS 8, 9 E 10.

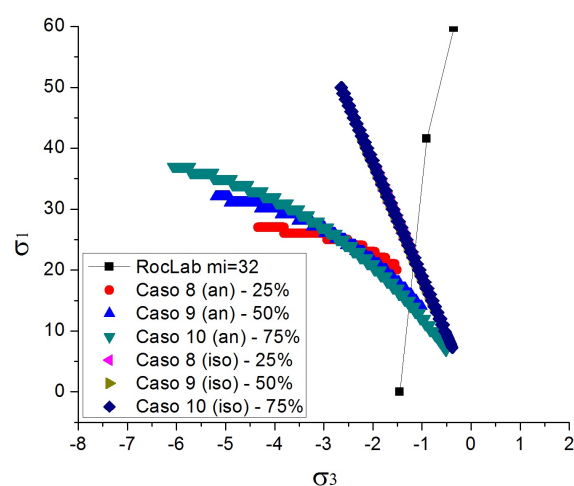
		$P_{ARN} > 20\%$	$P_{ARN} > 15\%$	$P_{ARN} > 10\%$	$P_{ARN} < 10\%$
Iso.	CASO 8	0,00%	0,00%	35,30%	64,70%
	CASO 9	0,00%	9,19%	42,64%	57,36%
	CASO 10	0,00%	23,19%	45,60%	54,40%
Aniso.	CASO 8	75,71%	100,00%	0,00%	0,00%
	CASO 9	74,59%	100,00%	0,00%	0,00%
	CASO 10	75,65%	100,00%	0,00%	0,00%

A figura 58 apresenta os gráficos ($\sigma_3 \times \sigma_1$) gerados com as 10000 análises dos pontos apresentados na figura 31a. O ponto A da figura 58a demonstra que aproximadamente metade dos pontos estão dentro da região de segurança, ou seja, não romperam. Já os pontos B e D, na maioria dos casos, se concentraram fora da região de segurança, ou seja, romperam. Por fim, nos casos C e E, todas análises ficaram dentro da faixa de segurança. Além disso, em todos os gráficos é possível perceber que os resultados para os casos anisotrópicos foram não lineares enquanto que os casos isotrópicos foram lineares.

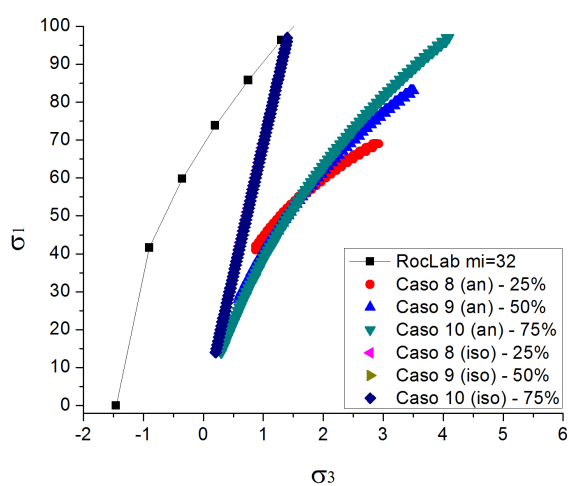
Assim como explorado nos gráficos da seção 5.5.1, neste caso também é possível perceber que nem sempre as situações isotrópicas garantem a segurança no sistema. Isto pode ser visualizado nos gráficos das figuras 58b e 58d onde a maioria das amostras ficou fora da região de segurança aceitável perante o critério de ruptura de Hoek-Brown.



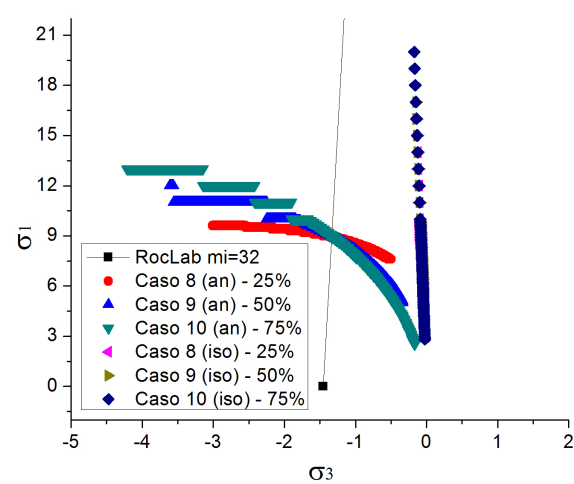
(a) Ponto A - 1901.



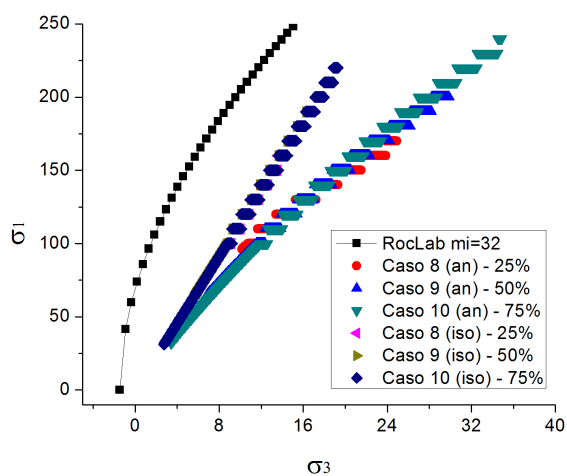
(b) Ponto B - 3278.



(c) Ponto C - 3669.



(d) Ponto D - 4466.



(e) Ponto E - 4779.

FIGURA 58 – GRÁFICOS DA TENSÕES PRINCIPAIS σ_3 (MPa) \times σ_1 (MPa).

6 DESCONTINUIDADES EM MACIÇOS ANISOTRÓPICOS - FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS DE CONTATO COM TENSÕES INICIAIS

De acordo com Priest (1995), a descontinuidade é definida como qualquer quebra mecânica ou fratura numa rocha cuja resistência à tração é desprezível. O termo descontinuidade não faz distinção entre geometria, idade ou modo de origem da feição. Entretanto, em alguns casos, é possível fazer a distinção entre descontinuidades naturais de origem geológica e as descontinuidades artificiais que são decorrentes de explosões, perfurações e escavações. Há diversas terminologias, criadas por geólogos, para descrever o termo descontinuidade tais como: falhas, juntas, planos de acamamento, planos de clivagem, fraturas, fissuras, contatos, dentre outros.

Para análise da estabilidade de construções em rochas é muito importante levar em consideração as descontinuidades presentes no maciço. Com isto, as propriedades das descontinuidades podem ser avaliadas da seguinte maneira (PRIEST, 1995):

- Investigação da estrutura geológica;
- Classificação do maciço rochoso;
- Geração de dados específicos para elaboração de modelos analíticos, numéricos ou empíricos para estabilidade do maciço rochoso como: deformação da rocha, fluxo do fluido, explosão da rocha, corte da rocha ou aplicação de reforço.

6.1 PRINCIPAIS PARÂMETROS DE UMA DESCONTINUIDADE

Dentre os parâmetros de descontinuidade que afetam o grau de fraturamento de um maciço rochoso pode-se citar o número de famílias das descontinuidades e o espaçamento entre elas. Em se tratando do número de famílias, pode-se afirmar que este parâmetro afeta o comportamento mecânico do maciço tendo em vista a sua relação com a deformação, ou seja, ele determina o limite que o maciço pode se deformar antes de ocorrer a ruptura da rocha intacta. Além disso, afeta a resistência equivalente do maciço rochoso. No caso em que há blocos pequenos, resultantes do espaçamento entre famílias de descontinuidades, o maciço tende a ser mais deformável quando comparado a blocos grandes.

O espaçamento de uma descontinuidade é definido como a distância entre os pares de descontinuidades medidos ao longo de uma linha com localização e orientação pré-definidos. Geralmente, para determinação do tamanho de uma descontinuidade, utiliza-se o parâmetro de área de superfície, pois estimar a sua dimensão é uma das propriedades mais difíceis que dependeria do desmonte da rocha.

Outro parâmetro importante a ser citado é a orientação das descontinuidades que visa determinar a forma dos blocos que compõem o maciço. Além disso, este fator é responsável por controlar os possíveis modos de instabilidade e o surgimento de deformações excessivas.

A rugosidade é um fator importante, pois determina a resistência ao cisalhamento da descontinuidade. Da definição, a rugosidade, em relação ao plano médio da descontinuidade é a combinação da aspereza com a ondulação da superfície.

Por último, é importante citar, neste trabalho, a resistência das paredes que se refere à compressão uniaxial das paredes adjacentes de uma descontinuidade. Esta resistência deve ser menor ao longo do plano de falha quando comparada à rocha intacta devido aos fenômenos físicos, químicos e biológicos que podem levar ao enfraquecimento da rocha.

Nesse contexto, serão apresentados modelos considerando famílias de descontinuidades cujo objetivo é avaliar os efeitos que eventuais aberturas podem trazer no maciço de acordo com as tensões *in situ* atuantes. Aspectos associados aos efeitos do contato deslizante não serão discutidos neste trabalho. No entanto, aspectos conceituais serão abordados nesse sentido.

6.2 MECÂNICA DO CONTATO

Conforme Becker (1992), a análise de tensões em problemas de contato é a maior preocupação em muitas aplicações da engenharia como é o caso de vasos de pressão interligados, engrenagens, rolamentos, vedações, dentre outros. Uma especial atenção deve ser dada à modelagem numérica de problemas de contato, pois nem sempre a área de contato entre os corpos é previamente conhecida. Além disso, se houver atrito agindo entre as superfícies de contato e mudanças na área de contato, o comportamento mecânico vai depender do histórico de carregamento da estrutura. Portanto, torna-se necessária a implementação de um procedimento iterativo e ou incremental para a solução aproximada dos problemas.

Comparando-se as diferentes técnicas numéricas para problemas de contato, pode-se afirmar que o MEC é adequado, pois (BECKER, 1992):

- As tensões no contato são mais precisas devido ao fato de que há um menor grau de aproximação imposto, isto porque apenas o contorno é aproximado e o domínio é contínuo;
- As forças de superfície, fundamentais para a determinação da pressão no contato, são calculadas com a mesma precisão dos deslocamentos;
- As variáveis de contato, na formulação do MEC, são diretamente acopladas às equações de equilíbrio e compatibilidade;
- Em problemas onde as áreas de contato inicialmente não são conhecidas, a malha original deve ser discretizada novamente para obtenção de resultados melhores. Definir uma nova

malha numa região local específica no MEC é simples quando comparada aos métodos de domínio.

Por outro lado, a elaboração dos modelos MEC deve ser cuidadosa para se evitar a formação de sistemas mal-condicionados que, em métodos incrementais de carga ou tempo, facilmente conduzem a resultados divergentes.

6.2.1 Classificação do Contato

De acordo com Aliabadi (2002), os problemas de contato podem ser categorizados da seguinte forma:

- **Contato sem Atrito:** Modo de contato que pode ser associado a superfícies suaves bem lubrificadas. Sendo assim, as superfícies são capazes de deslizar umas sobre as outras sem resistência ao longo do eixo tangencial, ou seja, apenas a tensão normal é resultante ao longo da interface do contato sem atrito.
- **Contato com Atrito:** Modo de contato realista em que o movimento de deslizamento na direção tangencial num ponto do contato são restringidos pela força de atrito, também conhecida como resistência ao cisalhamento tangencial, que, por sua vez, depende das forças normais exercidas no mesmo ponto. A relação entre as componentes normais e tangenciais resulta num comportamento não-linear entre o deslizamento das superfícies de contato e as cargas externas.
- **Contato Conforme:** Tipo de problema em que a extensão da área de contato independe do histórico de carregamento. Apesar de a área de contato não mudar com a magnitude de carga aplicada, um processo iterativo é necessário quando o atrito é considerado (LACERDA; WROBEL, 2000).
- **Contato não Conforme:** Como principal característica, o lado da área de contato inicial muda uma vez que os corpos são solicitados a carregamentos e descarregamentos externos.
- **Contato Avançado ou Progressivo:** É um dos mais relevantes dentre os contatos não conformes, onde os corpos inicialmente tocam num ponto ou ao longo de uma linha e a área de contato cresce com o aumento da carga.
- **Contato Regressivo:** À medida que a estrutura é carregada, a deformação aumenta, a área de contato é reduzida.

6.2.2 Modos de Contato

As equações adicionais para as condições de contato, referentes a um par de nós (a e b) de uma malha conforme, sendo um nó em cada face de contato, são descritas na

tabela 19 onde t_t e t_n são as forças de superfície tangenciais e normais, respectivamente. Os deslocamentos tangenciais e normais são definidos por u_t e u_n .

TABELA 19 – EQUAÇÕES PARA OS MODOS DE CONTATO.

Equações para as zonas de contato			
	Separação	Deslizamento	Aderência
Equilíbrio	$t_t^a - t_t^b = 0$	$t_t^a - t_t^b = 0$	$t_t^a - t_t^b = 0$
	$t_n^a - t_n^b = 0$	$t_n^a - t_n^b = 0$	$t_n^a - t_n^b = 0$
Compatibilidade	$t_t^a = 0$	$t_t^a \pm c_\mu t_n^a = 0$	$u_t^a + u_t^b = 0$
	$t_n^a = 0$	$u_n^a + u_n^b = 0$	$u_n^a + u_n^b = 0$

onde: c_μ é o coeficiente de atrito. Os significados destes modos são descritos na sequência:

- Modo de Separação: os pares de nós permanecem separados.
- Modo de Deslizamento: definido como pares de nós sem restrição na direção tangencial, portanto livres para deslizar uns sobre os outros.
- Modo de Aderência: Restrição das direções normais e tangenciais dos pares de nós sem ter ocorrido deslizamento durante carregamento.
- Modo de Deslizamento Parcial: introduzido para descrever o estágio intermediário entre dois casos extremos de pares de nós em fase de aderência ou em deslizamento, resultante do carregamento externo. Em alguns problemas de contato avançado, os pares de nós durante o processo incremental de carga passam por dois estágios de carga: aderido e deslizando.

6.2.3 Sistema de Coordenadas Local para o Contato

As variáveis na zona de contato são representadas no sistema de coordenadas global dos eixos cartesianos, porém na região de contato adota-se o sistema de coordenadas locais de acordo com a figura 59.

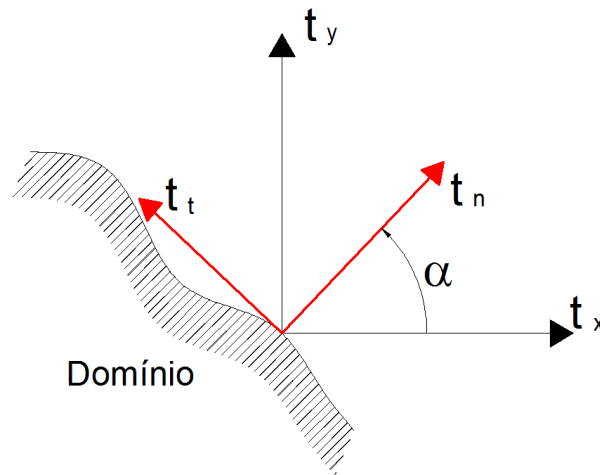


FIGURA 59 – COMPONENTES LOCAIS E GLOBAIS DAS FORÇAS DE SUPERFÍCIE.

Admitindo α como sendo o ângulo formado entre a força de superfície normal e o eixo cartesiano global na direção x , é possível escrever as forças de superfície no contato em função do eixo global da seguinte forma:

$$\begin{aligned} t_t &= -t_x \sin \alpha + t_y \cos \alpha \\ t_n &= t_x \cos \alpha + t_y \sin \alpha \end{aligned} \quad (110)$$

Utilizando a mesma transformação de coordenadas, pode-se representar os deslocamentos no contato em função dos eixos globais:

$$\begin{aligned} u_t &= -u_x \sin \alpha + u_y \cos \alpha \\ u_n &= u_x \cos \alpha + u_y \sin \alpha \end{aligned} \quad (111)$$

com

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{n_y}{n_x} \right) \quad \text{onde: } 0 \leq \alpha \leq 360^\circ \quad (112)$$

6.3 IMPLEMENTAÇÃO DOS PASSOS DE CARGA E PROCESSO ITERATIVO

Tendo em vista que a abertura de uma descontinuidade depende do estado de tensões instalado, e que o mesmo evolui conforme a aplicação do carregamento, faz-se necessário inserir carregamentos de maneira incremental tanto para condições de contorno como para o estado de tensão inicial. Com isso, entende-se que área de ruptura final dependerá do histórico de carregamento e da resistência considerada na interface.

Em se tratando do algoritmo implementado, a convergência do processo iterativo se dá a cada passo de carga com a definição dos pares de elementos abertos e em contato. Em determinadas situações, se a malha não for suficientemente refinada, o estado final de contato oscila entre possíveis soluções, e o processo iterativo é concluído de maneira forçada. Tal medida pode levar a uma solução divergente se o sistema não estiver bem condicionado.

Com relação à tensão inicial, foi necessário fazer uma adaptação das equações de compatibilidade em função do contato separado. Para melhor visualizar este fato, tem-se a figura 60 que ilustra uma cavidade, sob estado de tensões iniciais, e uma possível abertura imposta no modelo. Para que esta abertura possa acontecer, é necessário que as forças de superfícies atuantes nela sejam de tração. Portanto, as equações de compatibilidade utilizadas para geração dos resultados são apresentadas na tabela 20.

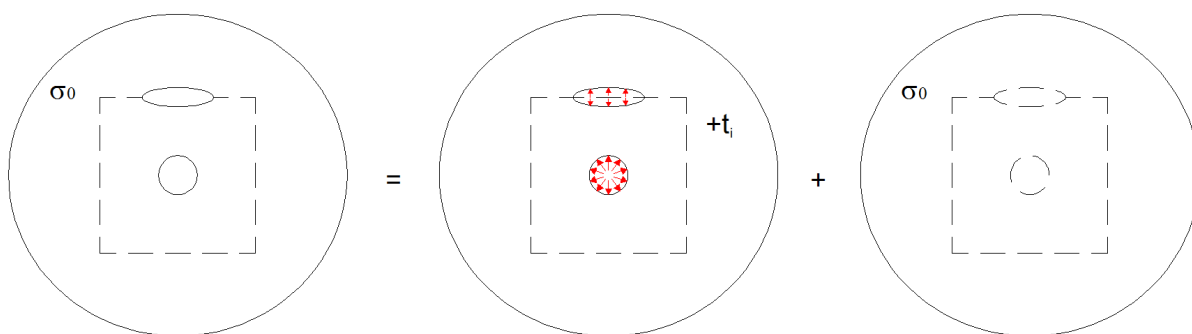


FIGURA 60 – TENSÕES INICIAIS EM MEIO INFINITO.

TABELA 20 – EQUAÇÕES PARA O MODO DE CONTATO SEPARADO.

Separação	
Equilíbrio	$t_t^a - t_t^b = 0$
	$t_n^a - t_n^b = 0$
Compatibilidade	$t_t^a = t_{\sigma_0}$
	$t_n^a = t_{\sigma_0}$

6.4 MODELAGEM DE UM DOMÍNIO COM MÚLTIPLAS SUB-REGIÕES

A inserção de sub-regiões é utilizada em problemas não-homogêneos, ou seja, estruturas compostas por mais de um material ou domínio. Portanto, todos os contornos devem ser discretizados inclusive os contornos internos que separam os meios com parâmetros mecânicos diferentes. Porém, neste trabalho, a inserção de sub-regiões objetiva modelar as famílias de descontinuidades que compõem o maciço.

As equações que regem os meios homogêneos juntamente com as condições de continuidade, referentes aos deslocamentos, de equilíbrio, relacionadas às forças de superfície sobre os contornos internos, produzem um sistema que pode ser resolvido, desde que as condições de contorno externas sejam levadas em consideração (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992).

Para exemplificar o estudo de uma região constituída por múltiplos sub-domínios isotrópicos ou anisotrópicos, é apresentado o modelo da figura 61.

Os símbolos presentes na figura 61 são definidos por:

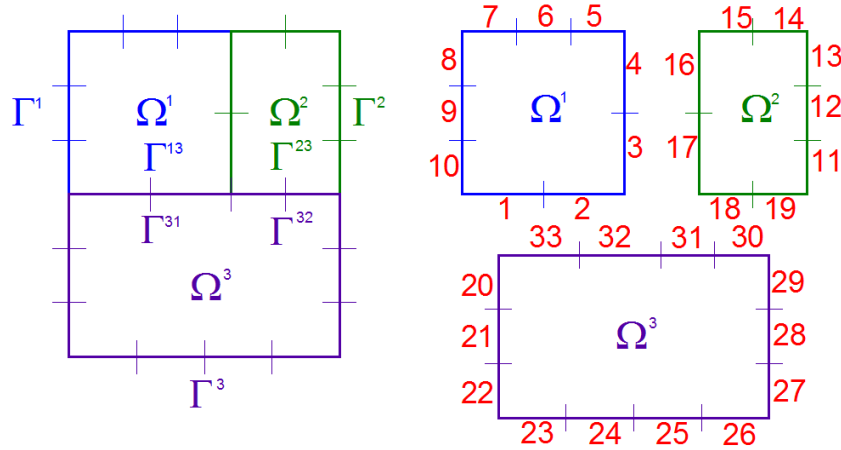


FIGURA 61 – MODELO COM 3 SUB-REGIÕES.

Γ^i : Parte externa do contorno de domínio Ω^i ;

Γ^{ij} : Contorno intermediário entre os domínios Ω^i e Ω^j ;

$\mathbf{u}^i, \mathbf{t}^i$: Deslocamentos e Forças de Superfície nos nós do contorno Γ^i como parte do domínio Ω^i ;

$\mathbf{u}^{ij}, \mathbf{t}^{ij}$: Deslocamentos e Forças de Superfície nos nós do contorno Γ^{ij} como parte do domínio Ω^i ;

$\mathbf{H}^i, \mathbf{G}^i$: Matrizes H e G obtidas para o domínio Ω^i que multiplicam \mathbf{u}^i e \mathbf{t}^i , respectivamente;

$\mathbf{H}^{ij}, \mathbf{G}^{ij}$: Matrizes H e G obtidas para o domínio Ω^i que multiplicam \mathbf{u}^{ij} e \mathbf{t}^{ij} , respectivamente.

onde: $G = \int_{\Gamma} U^{ij} d\Gamma$ e $H = \int_{\Gamma} T^{ij} d\Gamma$.

As formulações do MEC para as três zonas homogêneas, considerando o contato com aderência, são montadas da seguinte forma:

H													u		
	1	4	5	8	20	31	34	35	38	59	62	63	66		
	Ω_1					0				0					
20	0					Ω_2				0					
38	0					0				Ω_3					
66															
Equilíbrio: Contato 1-33	0														
Eq.de Comp.: Contato 1-33	1	0						0				-1	0		
	0	-1										0	1		
Equilíbrio: Contato 2-32	0														
Eq.de Comp.: Contato 2-32	0	1	0						0				-1	0	0
		0	-1										0	1	
Equilíbrio: Contato 3-17	0														
Eq.de Comp.: Contato 3-17	0	0	1	0			0	0	-1	0			-1	0	
		1	0						-1	0					
Equilíbrio: Contato 4-16	0														
Eq.de Comp.: Contato 4-16	0	0	1	0		0	0	-1	0			-1	0		
		1	0					-1	0						
Equilíbrio: Contato 18-31	0														
Eq.de Comp.: Contato 18-31	0					1	0	0			-1	0	0		
						0	-1				0	1			
Equilíbrio: Contato 19-30	0														
Eq.de Comp.: Contato 19-30	0					1	0	0		-1	0	0			
						0	-1			0	1				

FIGURA 62 – MONTAGEM DE Hu .

Conforme ilustrado nas figuras 62 e 63, para facilitar a programação do algoritmo, foram acrescentadas quatro linhas ao sistema para cada par de contato de modo que duas delas referem-se às equações de equilíbrio e as outras duas são as equações de compatibilidade.

		G														t				
		1	4	5	8	20	31	34	35	38	59	62	63	66						
20	38	Ω_1														t				
		0																		
		0																		
66		Ω_2																		
		0																		
		0																		
Equilíbrio:		-1	0													1	0			
Contato 1-33		0	-1													0	-1			
Eq.de Comp.: Contato 1-33		0																		
Equilíbrio:		0	-1	0									1	0	0					
Contato 2-32			0	-1									0	-1						
Eq.de Comp.: Contato 2-32		0																		
Equilíbrio:		0		0	-1							0	1							
Contato 3-17				1	0							1	0							
Eq.de Comp.: Contato 3-17		0																		
Equilíbrio:		0		0	-1							0	1							
Contato 4-16				1	0							1	0							
Eq.de Comp.: Contato 4-16		0																		
Equilíbrio:		0						-1	0	0				1	0					
Contato 18-31								0	-1					0	-1					
Eq.de Comp.: Contato 18-31		0																		
Equilíbrio:		0						-1	0	0				1	0					
Contato 19-30								0	-1					0	-1					
Eq.de Comp.: Contato 19-30		0																		

FIGURA 63 – MONTAGEM DE Gt.

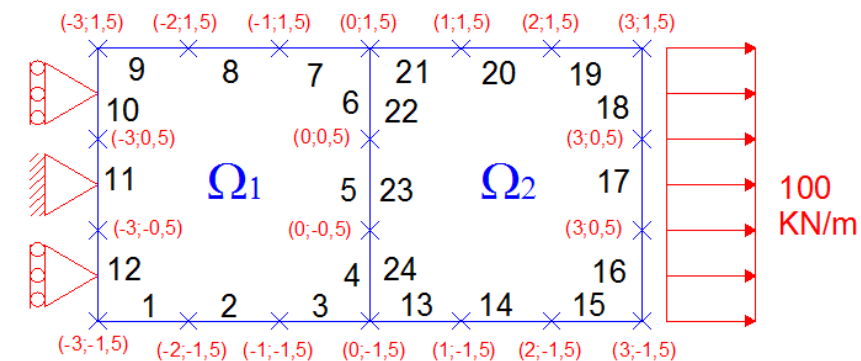
Uma forma simplificada de se ilustrar o sistema de equações, após a reordenação é apresentada na figura 64. Esta abordagem, embora mais cara do ponto de vista computacional, por requerer mais espaço de memória, tem a vantagem de facilitar a visualização da inserção e eventual troca das equações adicionais conforme andamento do processo iterativo.

7 RESULTADOS COM MÚLTIPLAS DESCONTINUIDADES

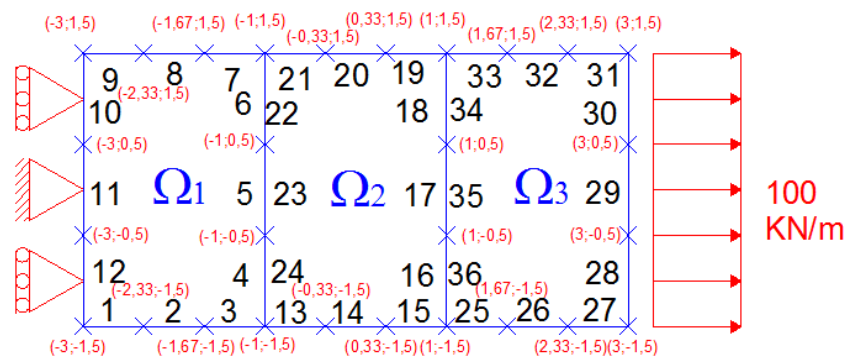
O objetivo deste capítulo é introduzir modelos simplificados com o intuito de validar as implementações realizadas e modelos mais complexos que envolvem uma cavidade em meio infinito com múltiplos planos de falha. Ressalta-se que em todos os modelos foram utilizados elementos de contorno constantes.

7.1 PROBLEMA DE BARRA COM DUAS E TRÊS SUB-REGIÕES

Para validação do algoritmo elaborado para sub-regiões, o primeiro teste realizado foi de uma barra carregada axialmente, cujas condições de contorno prescritas são apresentadas nas figuras 65a e 65b. Os modelos escolhidos consideram duas e três sub-regiões cujos módulos de elasticidade referem-se a um material quase-isotrópico e os valores adotados foram: E_1 igual a 28000 KN/m² e E_2 igual a 27600 KN/m². O número de elementos de contorno (NEC) utilizado em cada caso está indicado na figura 65.



(a) 2 Sub-Regiões - NEC: 24



(b) 3 Sub-Regiões - NEC: 36

FIGURA 65 – MODELO DE BARRA CONSIDERANDO DUAS E TRÊS SUB-REGIÕES COM AS CONDIÇÕES DE CONTOURNO PRESCRITAS.

Da resistência dos materiais sabe-se que a equação para o cálculo do deslocamento

de uma barra sob ação de força axial com extremidade livre é dada por:

$$u = \int_0^L \frac{P(x)}{A(x)E} dx = \frac{PL}{AE} \quad (113)$$

A tabela 21 apresenta os resultados para os deslocamentos horizontais, resultantes do programa desenvolvido, junto com o deslocamento calculado analiticamente por meio da equação (113). Devido ao pequeno erro percentual absoluto resultante, pode-se dizer que o algoritmo para inserção de sub-regiões está validado. Além disso, ao avaliar os resultados para os modelos com 2 e 3 sub-regiões, percebe-se que este último gerou um erro absoluto inferior, devido ao maior número de elementos na discretização do contorno.

TABELA 21 – RESULTADOS DOS DESLOCAMENTOS ANALÍTICO E O CALCULADO COM O ALGORITMO.

Sub-Regiões	$u_{analítico}(m)$	$u_{calculado}(m)$	Erro (%)
2	0,214	0,207	3,27
3	0,214	0,208	2,80

7.2 PROBLEMA DE CAVIDADE EM MEIO INFINITO COM MÚLTIPLAS SUB-REGIÕES E INTERFACES ADERIDAS

Para validação do modelo com múltiplas sub-regiões anisotrópicas, considerando os contatos perfeitamente aderidos, optou-se por uma cavidade circular com diâmetro de 5m em meio infinito com duas famílias de descontinuidades ortogonais, com uma delas rotacionada em 30° em relação ao eixo horizontal conforme demonstrado na figura 66. Os parâmetros de entrada utilizados são apresentados na tabela 22. Com relação às tensões *in situ* de compressão, adotou-se uma razão entre a tensão efetiva horizontal e vertical (K_0) no valor de 0,20.

TABELA 22 – PARÂMETROS DE ENTRADA DO MODELO.

E_1 (MPa)	E_2 (MPa)	$\nu_{12}=\nu_{21}$	σ_v (MPa)	σ_h (MPa)	m_i	GSI	σ_c (MPa)	$\eta_{12,1}=\eta_{2,12}$
60000	30000	0,2	50,0	10,0	29	75	240	0

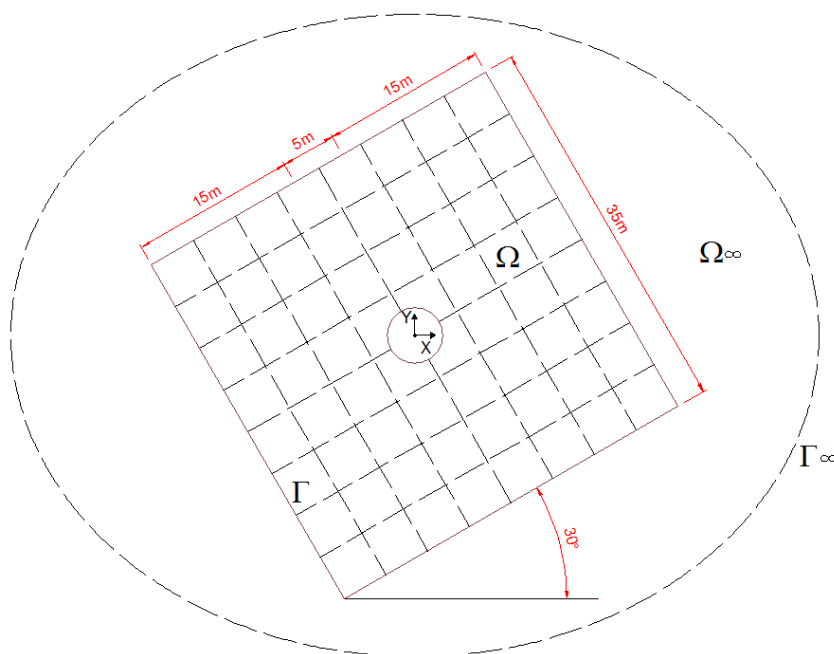
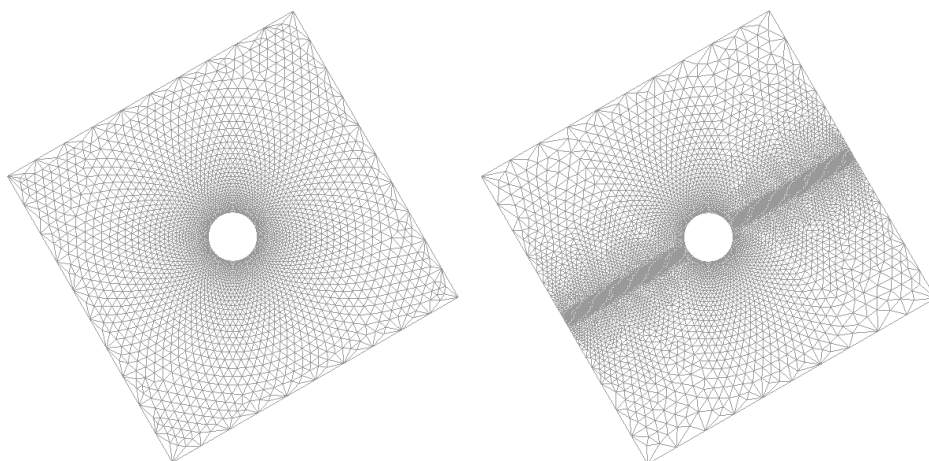


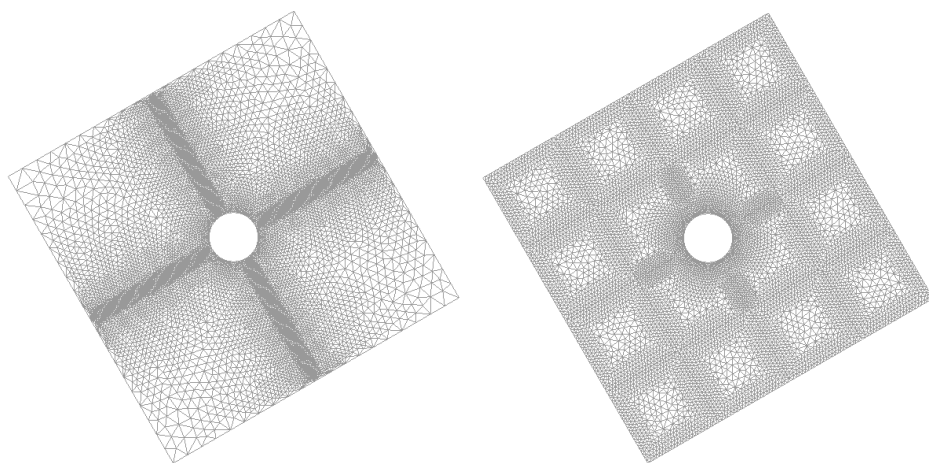
FIGURA 66 – DETALHE DO MODELO DO MACIÇO PRÓXIMO À CAVIDADE CIRCULAR E INDICAÇÃO DIRECIONAL DAS FAMÍLIAS DE DESCONTINUIDADE.

Nas análises, foram testados 6 modelos sob estado de tensões iniciais, objetivando avaliar a implementação das sub-regiões com múltiplos sub-domínios. Buscou-se a validação desses modelos por meio da análise da área de ruptura que deve ser igual, a menos de erros de aproximação numérica diferenciados e condicionamento do sistema de equações. Na figura 67 estão apresentadas as malhas de elementos de contorno e pontos internos, juntamente com o respectivo número de sub-regiões adotadas para o cálculo dos campos de tensão e deformação do maciço, para posterior aplicação do critério de Hoek-Brown. Observa-se que foram utilizadas malhas em diferentes configurações, porém, sempre mantendo-se 96 elementos de contorno na cavidade. Além disso, na figura 67 é apresentado o número de elementos de contorno (NEC) e o número de pontos internos (NPI) utilizados em cada modelo. Salienta-se que não houve um critério específico para definição das malhas nas interfaces.

Na figura 68 são apresentados os resultados obtidos da área de ruptura para cada modelo. Algumas perturbações podem ser observadas nas duas últimas imagens, decorrentes de integrações quase singulares com a excessiva proximidade de pontos internos aos elementos de contorno das interfaces.

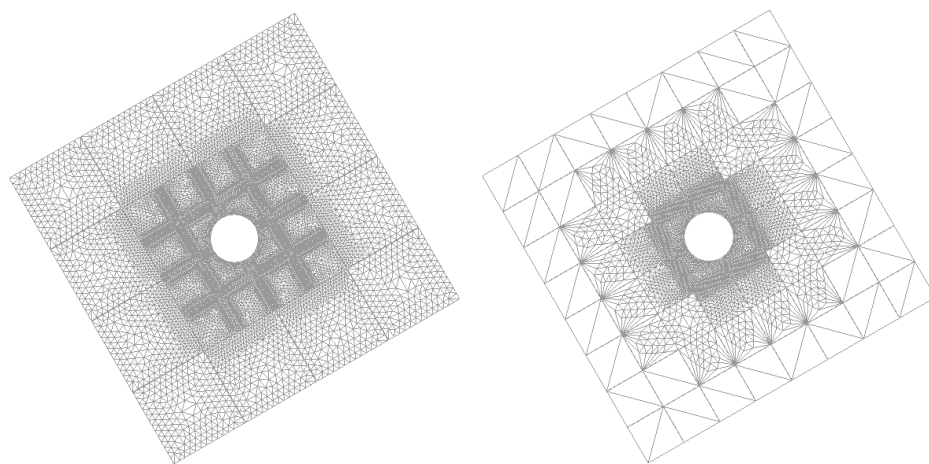


(a) 2 Sub-Regiões - NEC:176 e NPI:3299. (b) 3 Sub-Regiões - NEC: 640 e NPI: 6632.



(c) 5 Sub-Regiões - NEC: 1024 e NPI: 10117.

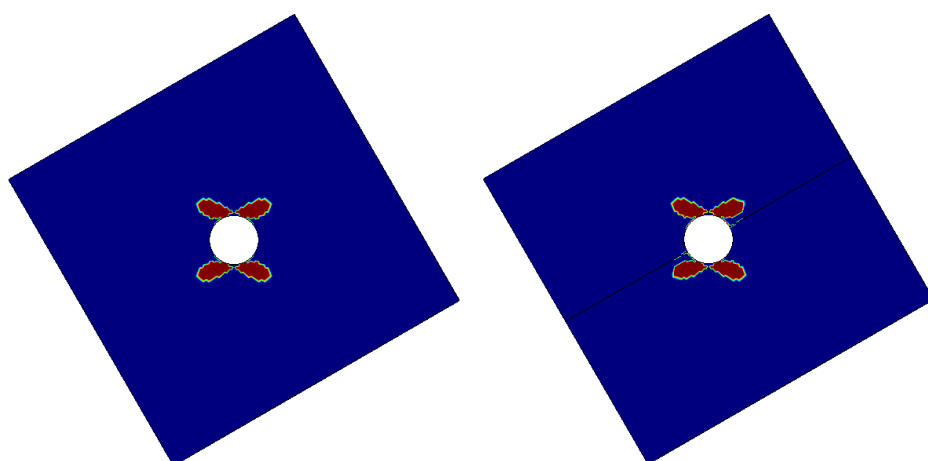
(d) 17 Sub-Regiões NEC: 2016 e NPI: 9095.



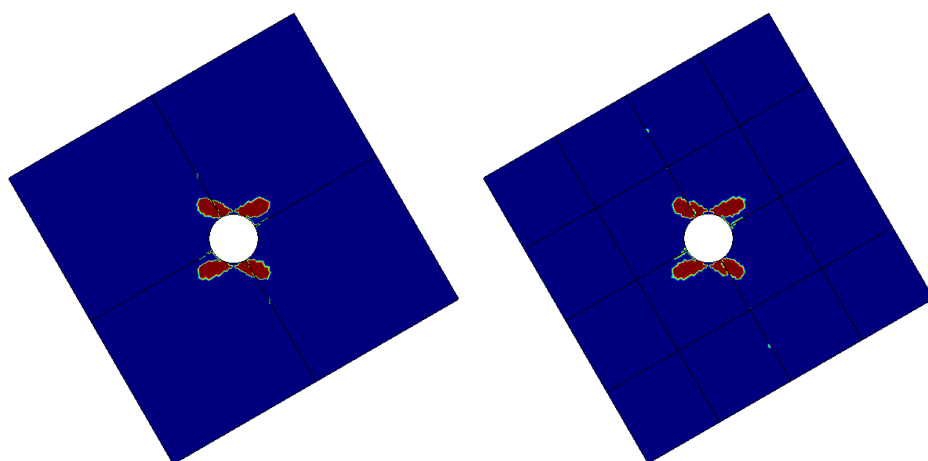
(e) 29 Sub-Regiões NEC: 2168 e NPI: 10778.

(f) 65 Sub-Regiões NEC: 1104 e NPI: 4490.

FIGURA 67 – MALHAS DE PONTOS INTERNOS UTILIZADAS NAS ANÁLISES PARA A VALIDAÇÃO DO CÓDIGO.

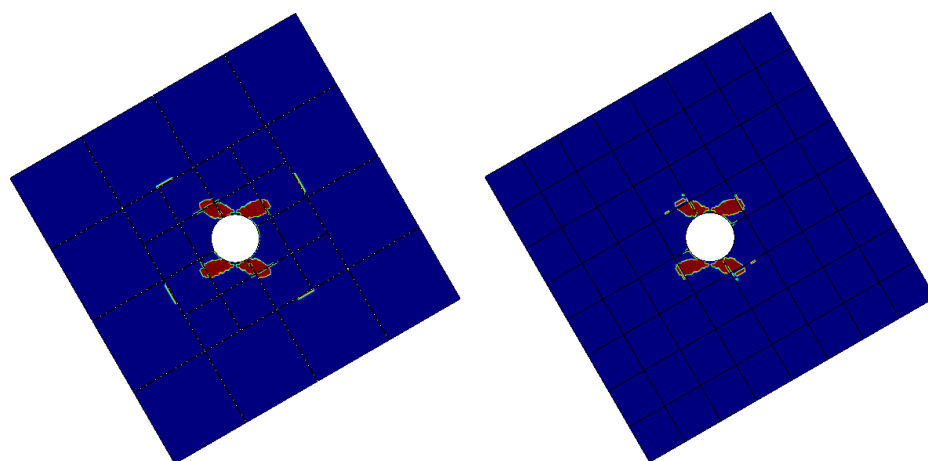


(a) 2 Sub-Regiões - NEC:176 e NPI:3299. (b) 3 Sub-Regiões - NEC: 640 e NPI: 6632.



(c) 5 Sub-Regiões - NEC: 1024 e NPI: 10117.

(d) 17 Sub-Regiões NEC: 2016 e NPI: 9095.



(e) 29 Sub-Regiões NEC: 2168 e NPI: 10778.

(f) 65 Sub-Regiões NEC: 1104 e NPI: 4490.

FIGURA 68 – REGIÕES DE RUPTURA PARA MODELOS COM MÚLTIPLAS SUB-REGIÕES.

7.3 MODELO CONSIDERANDO PASSOS DE CARGA

Muito embora possa não fazer sentido determinar passos de carga para o estado de tensões iniciais, apresenta-se essa consideração com o mero intuito de ilustrar a evolução da área de ruptura com a variação desta condição inicial. Para isto, considerou-se na análise 10 passos de carga de compressão, cujos parâmetros adotados podem ser vistos na tabela 23.

TABELA 23 – PARÂMETROS DE ENTRADA DO MODELO.

E_1 (MPa)	E_2 (MPa)	ν	σ_v (MPa)	σ_h (MPa)	m_i	GSI	σ_c (MPa)	NEC	NPI
60000	30000	0,2	50	10	29	75	240	431	7703

O modelo escolhido para a análise possui duas sub-regiões e pode ser visualizado na figura 69.

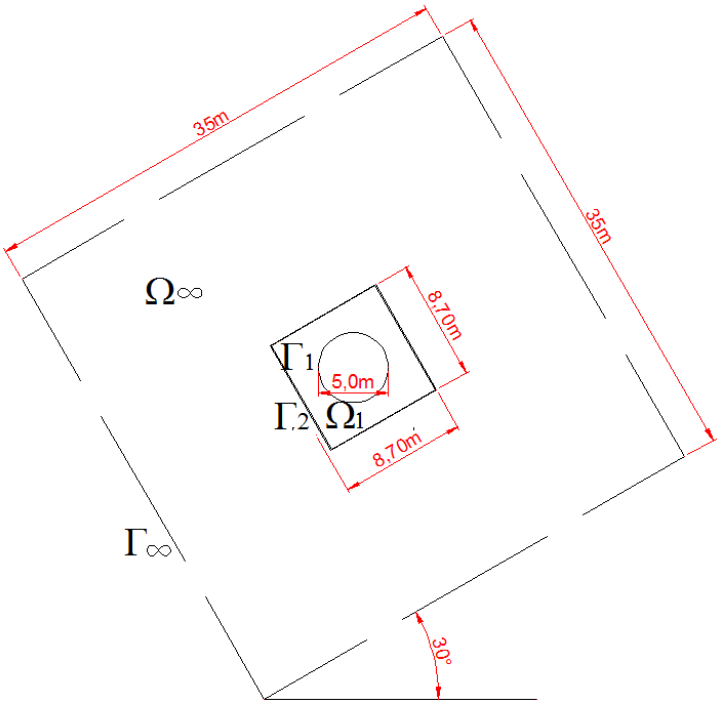


FIGURA 69 – MODELO UTILIZADO NA ANÁLISE COM PASSOS DE CARGA.

A malha adotada possui 431 elementos de contorno e 7703 pontos internos conforme ilustra a figura 70.

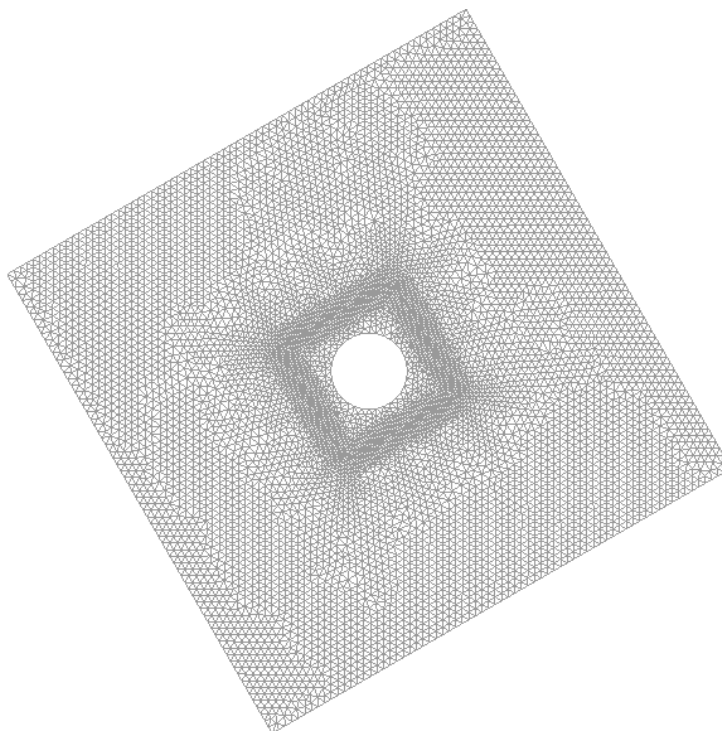


FIGURA 70 – MALHA DE ELEMENTOS ADOTADA PARA O CASO DE PASSOS DE CARGA.

Na sequência, são apresentadas as imagens (ver figuras 71, 72 e 73) contendo as áreas de ruptura para cada passo de carga. De acordo com a evolução das áreas, é possível perceber um aumento considerável da área de ruptura à medida que o carregamento cresce. A cada passo de carga, há um acúmulo das rupturas ocorridas anteriormente.

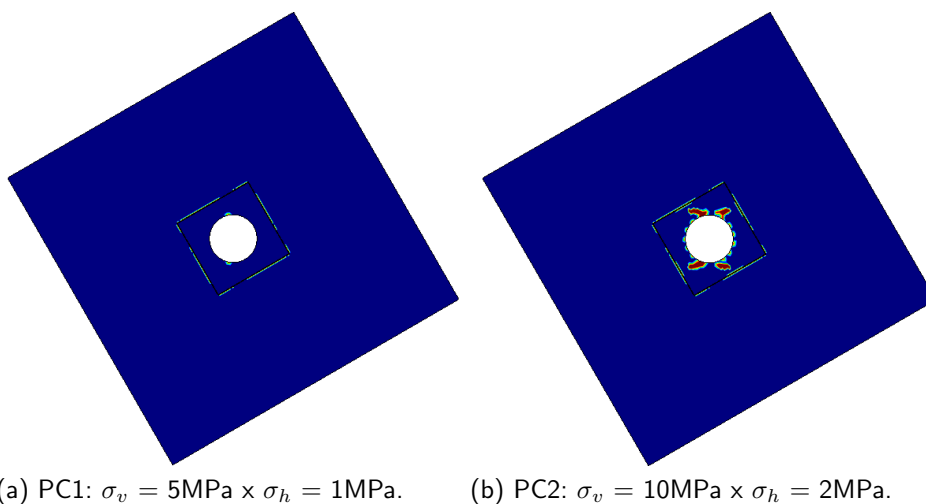
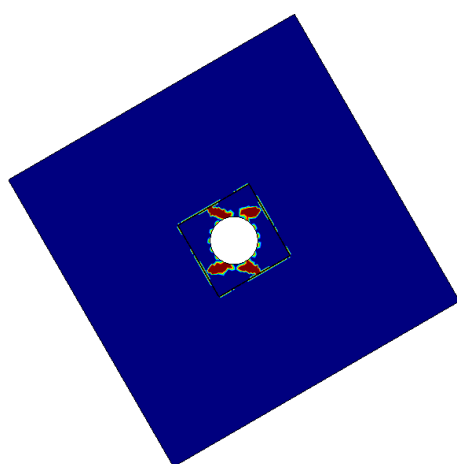
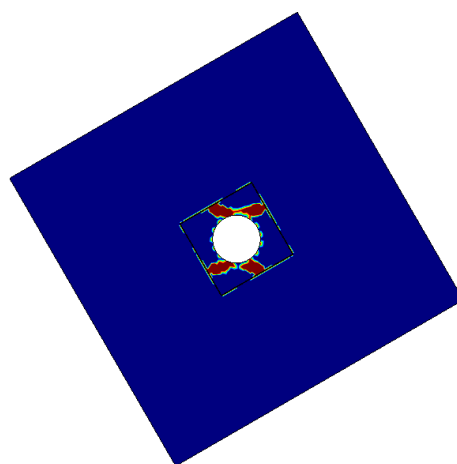


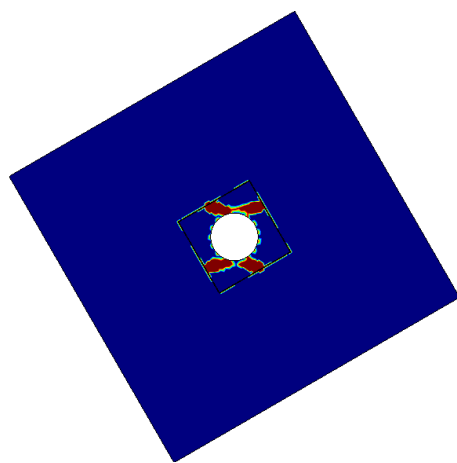
FIGURA 71 – RESULTADOS DAS ÁREAS DE RUPTURA PARA OS DOIS PASSOS DE CARGA INICIAIS.



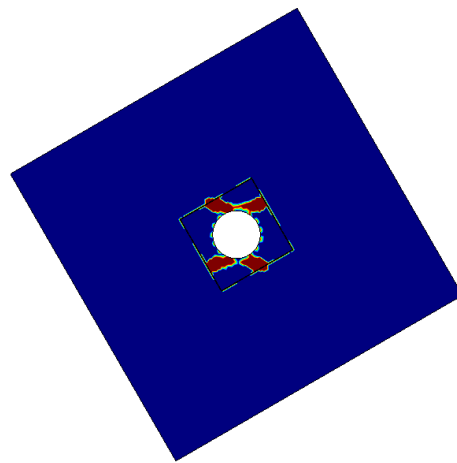
(a) PC3: $\sigma_v = 15\text{MPa} \times \sigma_h = 3\text{MPa}$.



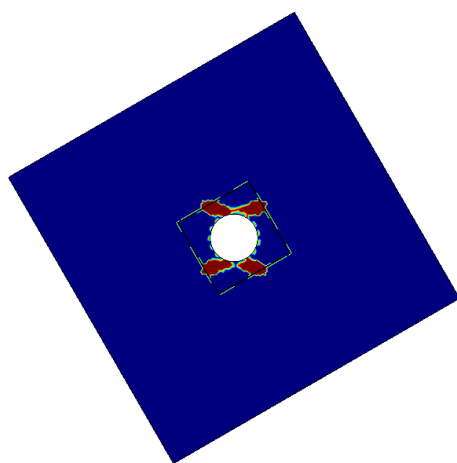
(b) PC4: $\sigma_v = 20\text{MPa} \times \sigma_h = 4\text{MPa}$



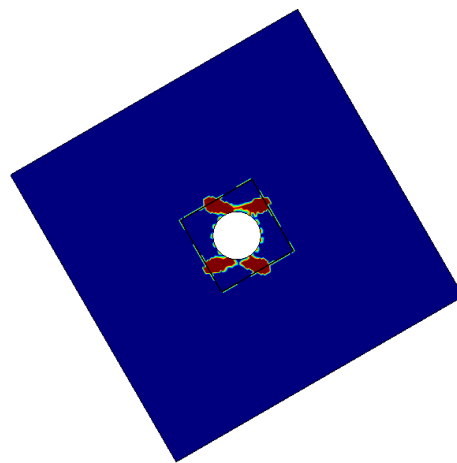
(c) PC5: $\sigma_v = 25\text{MPa} \times \sigma_h = 5\text{MPa}$.



(d) PC6: $\sigma_v = 30\text{MPa} \times \sigma_h = 6\text{MPa}$.

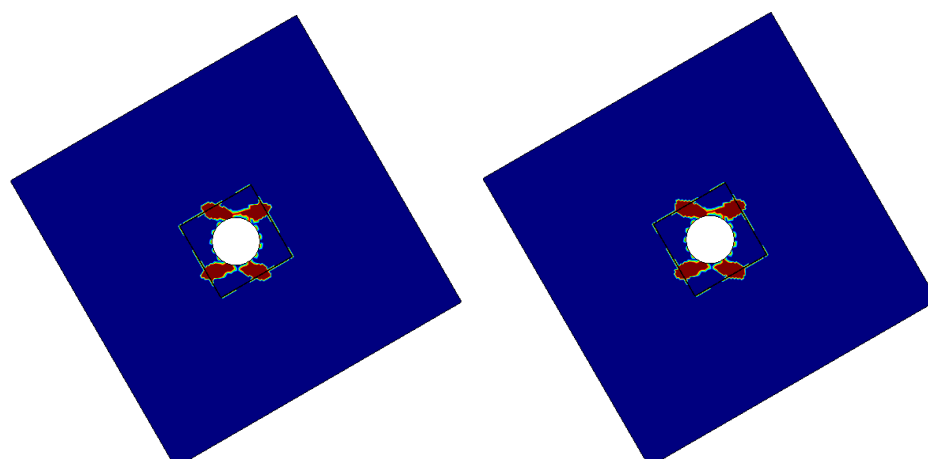


(e) PC7: $\sigma_v = 35\text{MPa} \times \sigma_h = 7\text{MPa}$.



(f) PC8: $\sigma_v = 40\text{MPa} \times \sigma_h = 8\text{MPa}$.

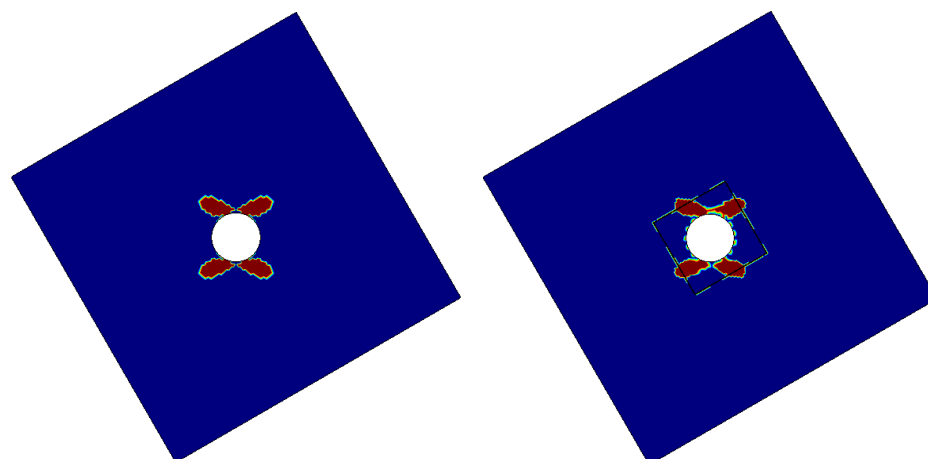
FIGURA 72 – RESULTADOS DAS ÁREAS DE RUPTURA PARA OS PASSOS DE CARGA 3 A 8.



(a) PC9: $\sigma_v = 45\text{MPa} \times \sigma_h = 9\text{MPa}$. (b) PC10: $\sigma_v = 50\text{MPa} \times \sigma_h = 10\text{MPa}$

FIGURA 73 – RESULTADOS DOS DOIS PASSOS DE CARGA FINAIS.

Para validação deste modelo foi gerado o resultado para uma sub-região, cuja malha da cavidade tem 96 elementos de contorno enquanto que o domínio possui a mesma malha utilizada no item anterior (ver figura 67a). De acordo com as imagens da figura 74, o resultado gerado com 2 sub-regiões é bem próximo do obtido com 1 região, apesar das perturbações observáveis próximas às interfaces.



(a) 1 Sub-Região.

(b) 2 Sub-Regiões

FIGURA 74 – ÁREA DE RUPTURA PARA 1 SUB-REGIÃO E 2 SUB-REGIÕES.

Na tabela 24 estão descritas as áreas de ruptura normalizadas resultantes de cada passo de carga. De acordo com os resultados obtidos, a média do aumento de área rompida, a partir do quarto passo de carga, foi de aproximadamente 1,13 vezes maior a cada passo de carga. Com este exemplo, foi possível validar a utilização de passos de carga no modelo implementado.

TABELA 24 – ÁREAS DE RUPTURA (AR) RESULTANTES PARA CADA PASSO DE CARGA

Passo de Carga	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
AR(m ²)	0,0	1,89	5,88	8,06	9,31	10,29	11,30	12,22	12,97	13,81

Na sequência é apresentado o gráfico da figura 75 para mostrar a evolução da área de ruptura a cada passo de carga. Vale ressaltar que, ao simular o mesmo modelo com apenas um passo de carga, o resultado final foi o mesmo, ou seja, 13,81m². Tal fato era esperado dada a linearidade do problema. Entretanto, quando são inseridas duas sub-regiões, a área de ruptura resultante é um pouco inferior devido ao afastamento imposto entre as sub-regiões 1 e 2.

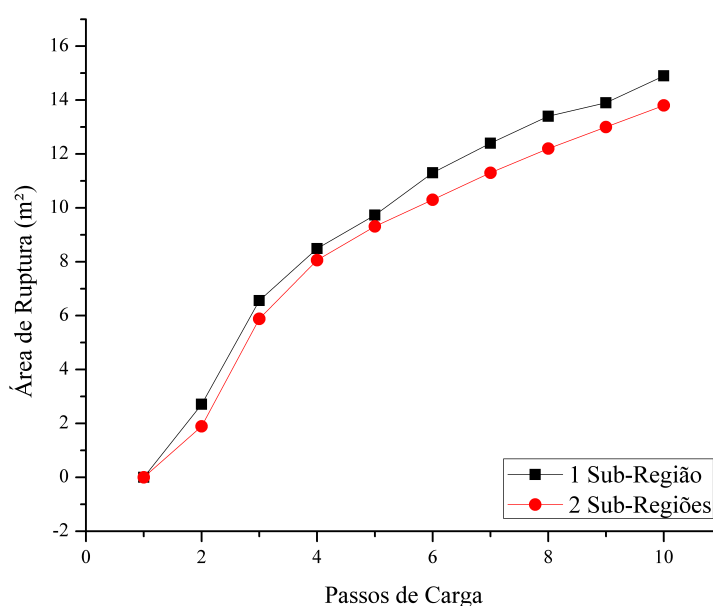


FIGURA 75 – GRÁFICO DOS PASSOS DE CARGA x ÁREA DE RUPTURA.

7.4 PROBLEMA DE INTERFACE ABERTA EM MEIO INFINITO

Com o algoritmo implementado é possível realizar diversos tipos de análises estruturais como, por exemplo, a simulação da abertura de uma trinca em meio infinito sob estado plano de deformações. Essa simulação é o modelo abordado nesta seção. Para validação deste exemplo, foram avaliadas as tensões na direção y próximas à fenda (ver figura 76) por meio da seguinte equação analítica (ANDERSON, 1995):

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$$

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (114)$$

onde: K_I é o fator de intensidade de tensões; r , neste caso, é a distância da ponta da trinca até o ponto de análise; a é a metade do comprimento da trinca e σ é a tensão aplicada no modelo.

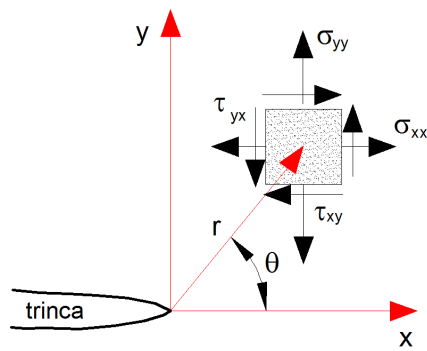


FIGURA 76 – ESTADO DE TENSÕES PRÓXIMO DA TRINCA.

O modelo avaliado foi de uma placa, em meio infinito, tracionada, de acordo com a figura 77.

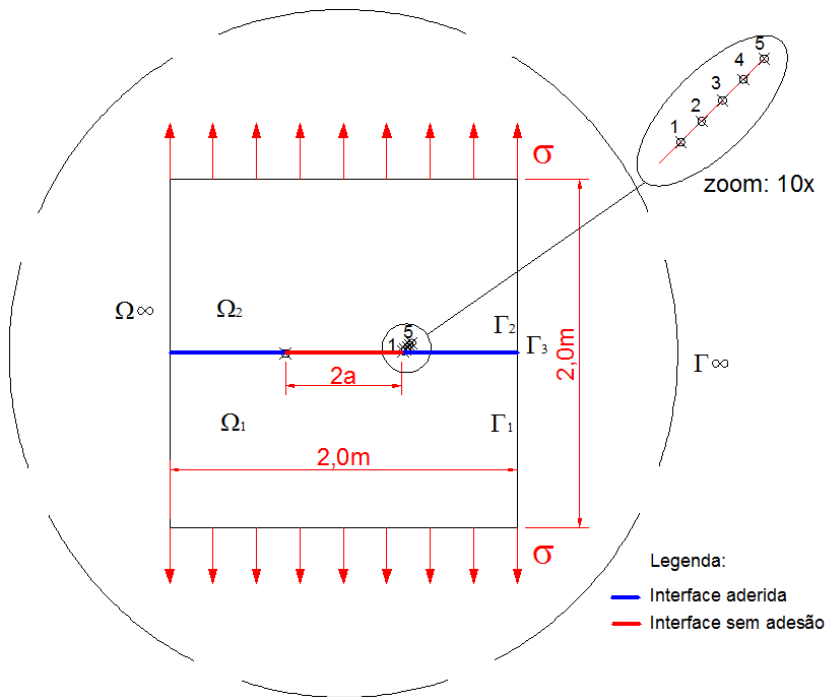


FIGURA 77 – MODELO DE PLACA EM MEIO INFINITO.

A tabela 25 apresenta os parâmetros de entrada da placa em estudo.

TABELA 25 – PARÂMETROS DE ENTRADA DA PLACA EM ANÁLISE.

E_1 (MPa)	E_2 (MPa)	ν	μ (MPa)	σ_1 (MPa)	a (m)
210000	208600	0,20	87500	100	0,333333

Na tabela 26 são apresentados os resultados analíticos para as tensões e os deslocamentos dos pontos internos, numerados de 1 a 5, conforme apontados na figura 77.

TABELA 26 – RESULTADOS ANALÍTICOS OBTIDOS COM AS EQUAÇÕES DA MECÂNICA DA FRATURA.

Ponto	x(m)	y(m)	K_I	θ (°)	r (m)	σ_{yy} (MPa)
1	0,345	0,012	102,3327	45	0,0170	391,888
2	0,357	0,024	102,3327	45	0,0339	277,110
3	0,369	0,036	102,3327	45	0,0509	226,259
4	0,381	0,048	102,3327	45	0,0679	195,947
5	0,393	0,060	102,3327	45	0,0849	175,260

A tabela 27 apresenta as tensões na direção y, próximas à trinca, resultantes da análise numérica com três modelos, considerando um total de: 300, 600 e 900 elementos de contorno. Além disso, vale ressaltar que na trinca foram considerados: 10, 20 e 30 elementos no contorno. De acordo com os resultados obtidos é possível perceber que há convergência, ou seja, quanto mais refinada é a malha de elementos de contorno menor é o erro médio resultante. Pode-se afirmar que os resultados são satisfatórios, em virtude da interpolação limitada inerente ao elemento constante e os elevados gradientes da tensão existentes na ponta da trinca. Outra observação importante consiste no fato de que a fórmula da mecânica da fratura, utilizada para validação deste exemplo, se aplica a pequenas distâncias a partir da ponta da trinca.

TABELA 27 – RESULTADOS DAS TENSÕES (σ_{yy}) OBTIDOS COM O ALGORITMO ELABORADO.

		10 elementos		20 elementos		30 elementos	
Ponto	r (m)	σ_{yy} (MPa)	Erro (%)	σ_{yy} (MPa)	Erro (%)	σ_{yy} (MPa)	Erro (%)
1	0,0170	416,336	6,24%	418,489	6,79%	431,513	10,11%
2	0,0339	302,950	9,32%	316,892	14,36%	309,385	11,65%
3	0,0509	259,967	14,90%	257,600	13,85%	250,271	10,61%
4	0,0679	232,616	18,71%	222,456	13,53%	218,750	11,64%
5	0,0849	210,212	19,94%	200,711	14,52%	198,449	13,23%

Para ilustrar a abertura de cada modelo avaliado, tem-se o gráfico da figura 78 com os 3 casos plotados. A legenda apresenta o número de elementos utilizados para refinar toda a trinca (2a).

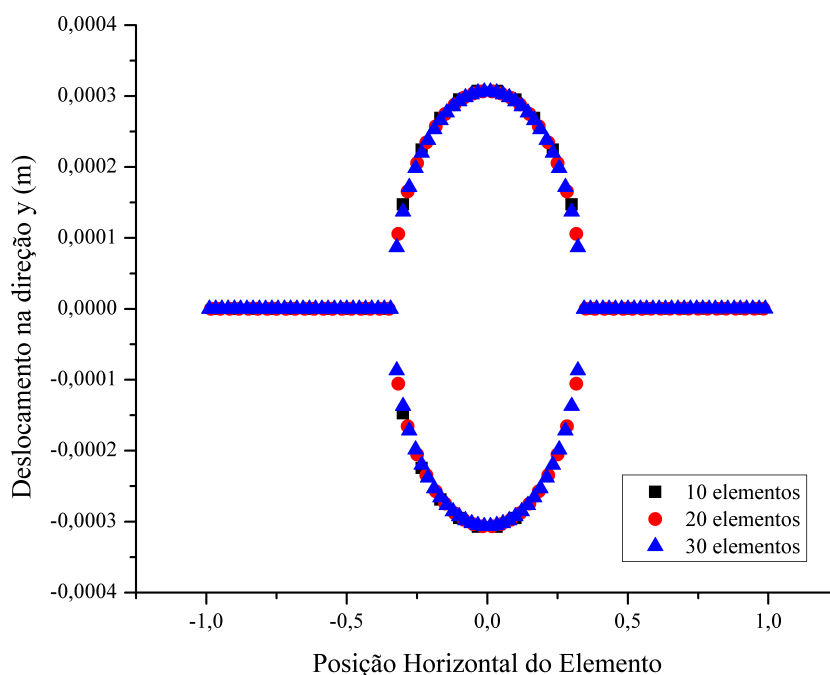


FIGURA 78 – RESULTADO DA ABERTURA DA TRINCA PARA OS TRÊS MODELOS.

Com os resultados apresentados, pode-se concluir que o algoritmo desenvolvido também é capaz de resolver problemas de mecânica da fratura. Entretanto, para esta finalidade específica, recomenda-se a utilização de elementos de contorno de ordem polinomial superior, em conjunto com tratamentos adequados para modelagem da singularidade junto à ponta da trinca.

7.5 PROBLEMA DE CAVIDADE EM MEIO INFINITO COM MÚLTIPLAS SUB-REGIÕES ANISOTRÓPICAS E INTERFACE COM POTENCIAL DE ABERTURA

O presente modelo visa abordar o problema de cavidade, em meio infinito, considerando múltiplas sub-regiões e com possibilidade de abertura na interface A conforme ilustra a figura 79. A ideia aqui é possibilitar a abertura desse contato:

1. Se a tensão normal na direção principal 3 (direção 1 na convenção de estruturas) for de tração;

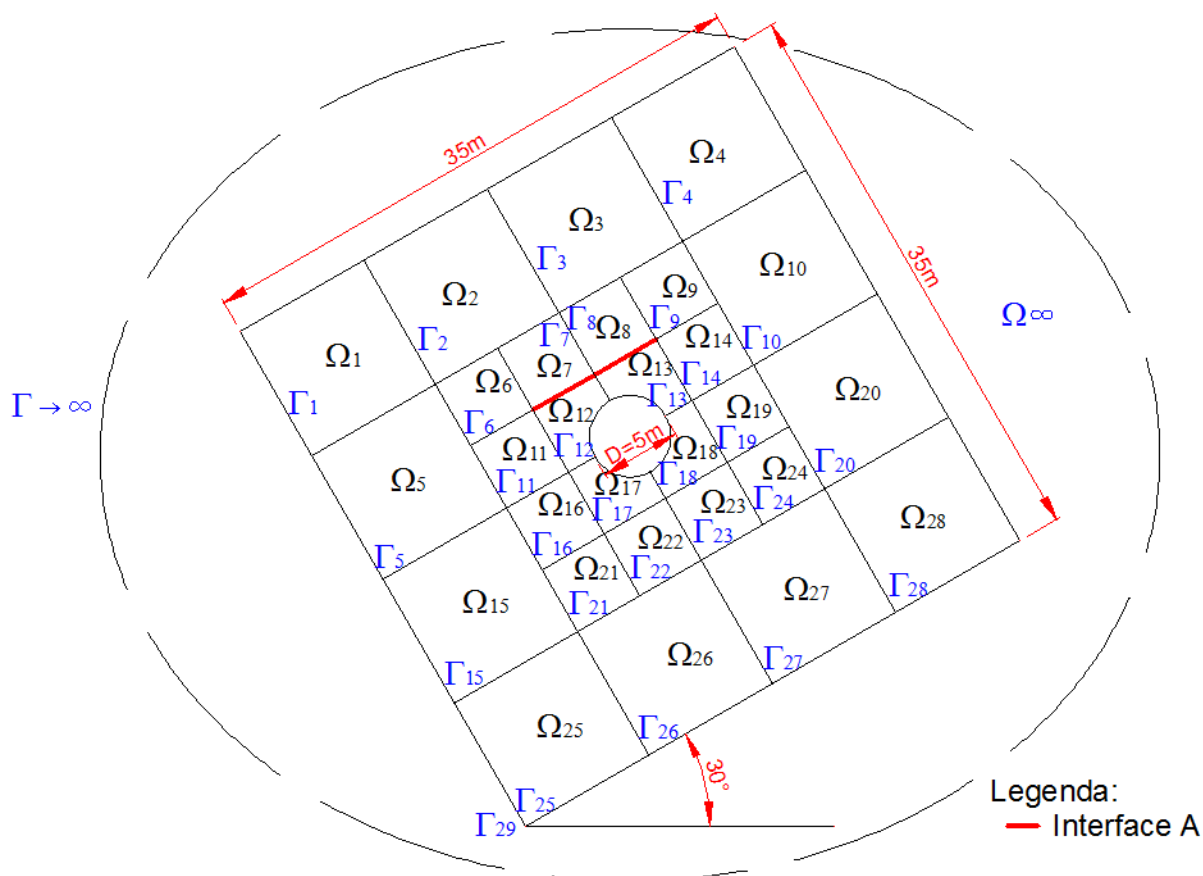


FIGURA 79 – MODELO DE ESTUDO COM UMA FAMÍLIA DE DESCONTINUIDADE.

Os parâmetros utilizados para a modelagem deste maciço são apresentados na tabela 28.

TABELA 28 – PARÂMETROS DE ENTRADA DO MODELO.

E_1 (MPa)	E_2 (MPa)	ν	σ_v (MPa)	σ_h (MPa)	m_i	GSI	σ_c (MPa)
60000	30000	0,2	8	0	29	75	240

Inicialmente, para validar o modelo, onde as descontinuidades permanecessem perfeitamente aderidas, foram confrontados os resultados obtidos com 2 e 29 sub-domínios. As malhas de contorno e domínio adotadas são apresentadas na figura 80.

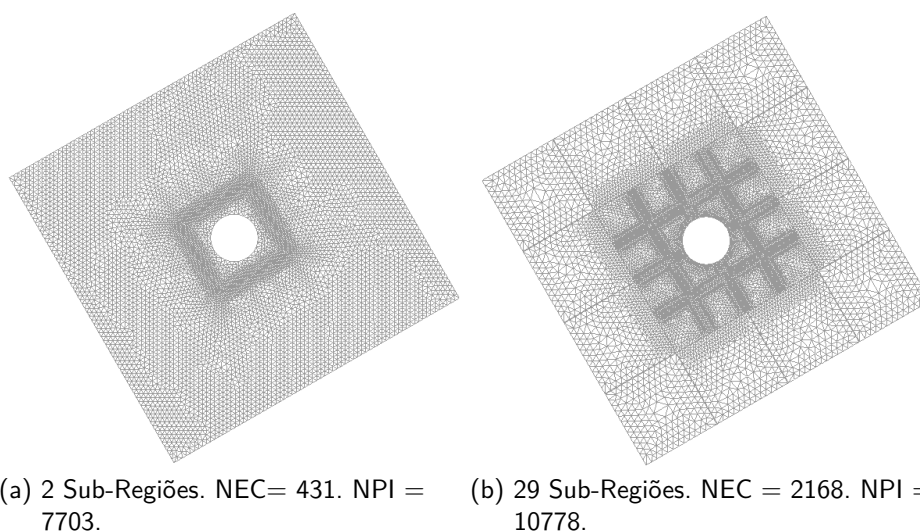


FIGURA 80 – MALHAS DE PONTOS INTERNOS UTILIZADAS NO PROBLEMA DE UM MACIÇO COM INTERFACES ADERIDAS.

A figura 81 apresenta os resultados obtidos para a área de ruptura dos dois modelos, cujas interfaces permaneceram perfeitamente aderidas. Ao observar ambas as imagens (ver figuras 81a e 81b), pode-se dizer que, apesar do surgimento de algumas perturbações, o resultado foi aproximadamente o mesmo.

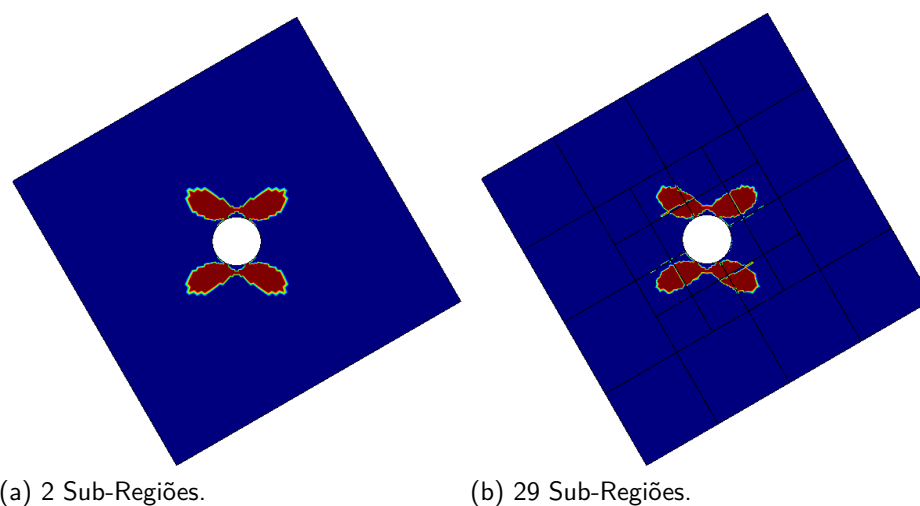
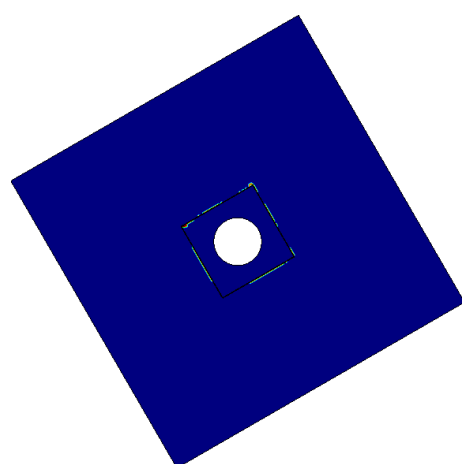
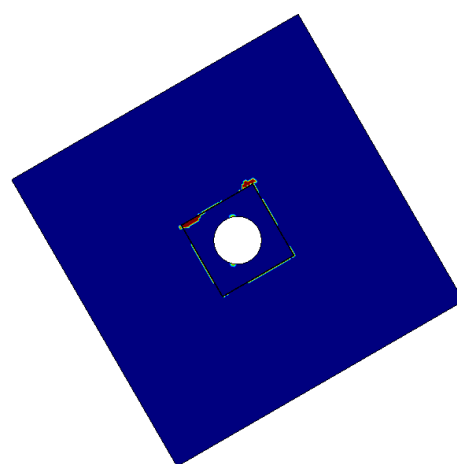


FIGURA 81 – RESULTADOS DAS ÁREAS DE RUPTURA DO MACIÇO COM INTERFACES ADERIDAS.

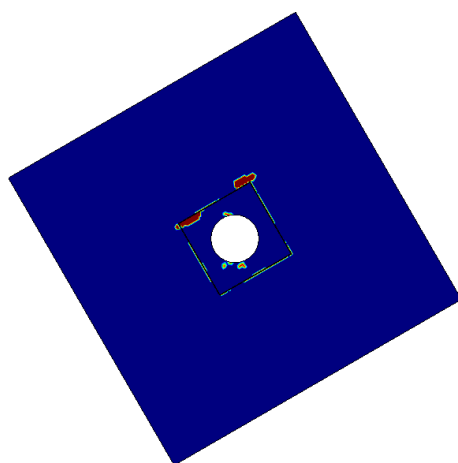
As figuras 82 e 83 apresentam a evolução da área de ruptura, ao longo de 10 passos de carga, com possibilidade de abertura na interface A e resistência à tração nula nas interfaces.



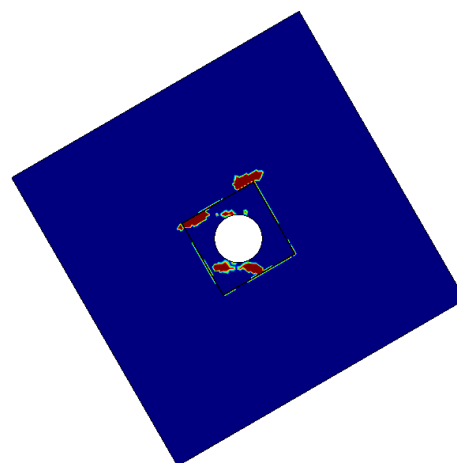
(a) 1º Passo de Carga.



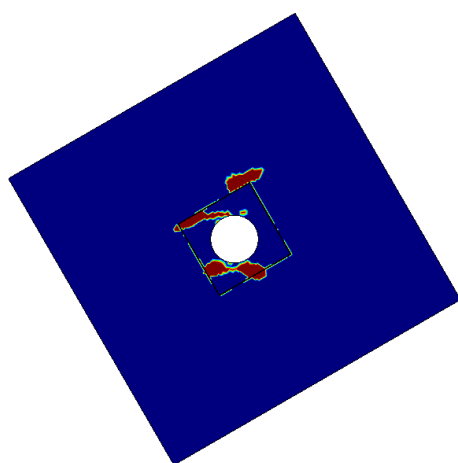
(b) 2º Passo de Carga.



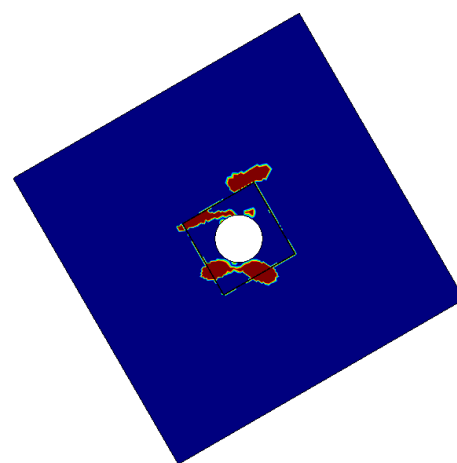
(c) 3º Passo de Carga.



(d) 4º Passo de Carga.



(e) 5º Passo de Carga.



(f) 6º Passo de Carga.

FIGURA 82 – RESULTADO DAS ÁREAS DE RUPTURA DOS PASSOS DE CARGAS (1 A 6) PARA O MODELO COM 2 SUB-REGIÕES E RESISTÊNCIA NULA À TRAÇÃO NAS INTERFACES.

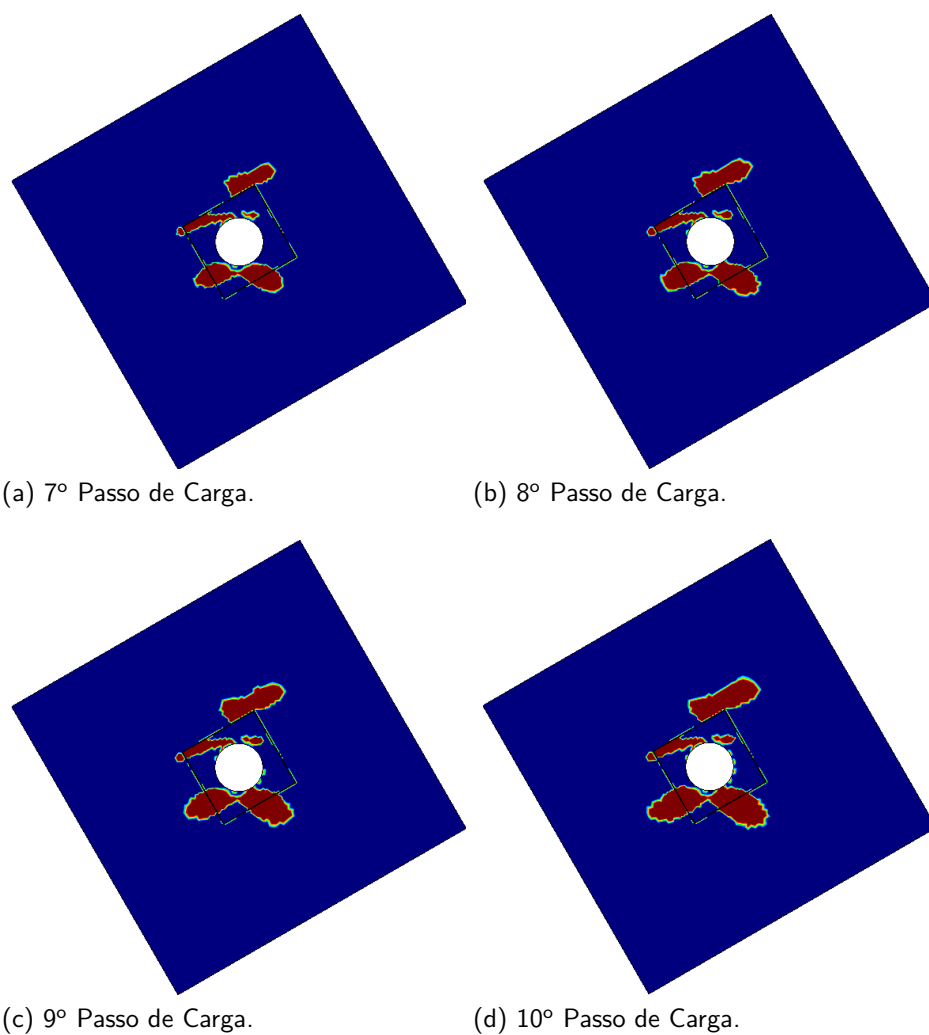


FIGURA 83 – RESULTADO DAS ÁREAS DE RUPTURA DOS PASSOS DE CARGAS (7 A 10) PARA O MODELO COM 2 SUB-REGIÕES E RESISTÊNCIA NULA À TRAÇÃO NAS INTERFACES.

Na figura 84, mostra-se a evolução das tensões de tração na interface A com o incremento de carga. Com base neste resultado, impôs-se ao modelo com condição de abertura na interface A, uma resistência à tração nas interfaces de 1,50MPa.

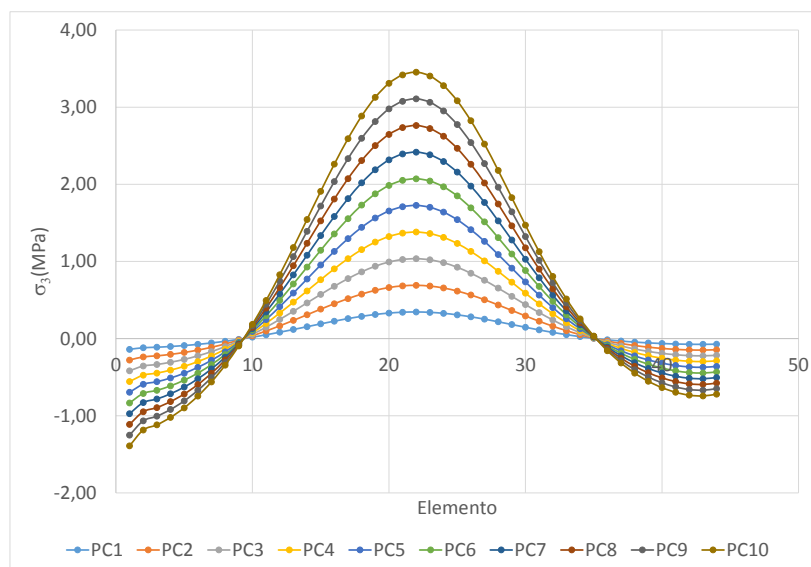


FIGURA 84 – GRÁFICO DA EVOLUÇÃO DAS TENSÕES DE TRAÇÃO NA INTERFACE DE ABERTURA COM O INCREMENTO DE CARGA PARA CADA PASSO DE CARGA (PC).

Ao impor a condição de possibilidade de abertura na interface A (ver figura 79) e resistência à tração nas interfaces de 1,5MPa, o resultado obtido com o modelo de 2 sub-regiões, ao longo de 10 de passos de carga, pode ser observado nas figuras 85, 86 e 87. Fica evidenciada a quebra de simetria nos resultados de área de ruptura com a abertura da interface após o quarto passo de carga. Também é evidente que a abertura promoveu a maior ruptura na região mais próxima à mesma.

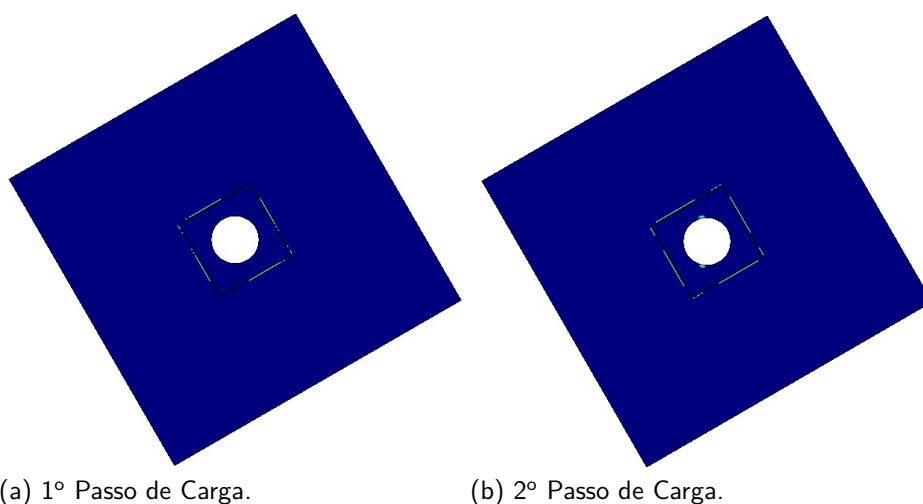
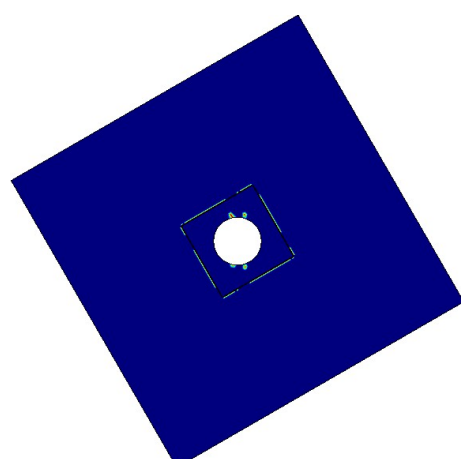
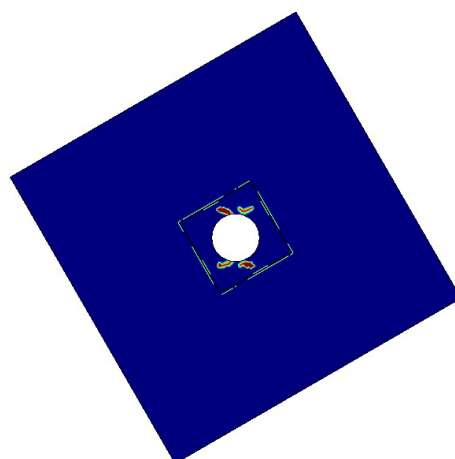


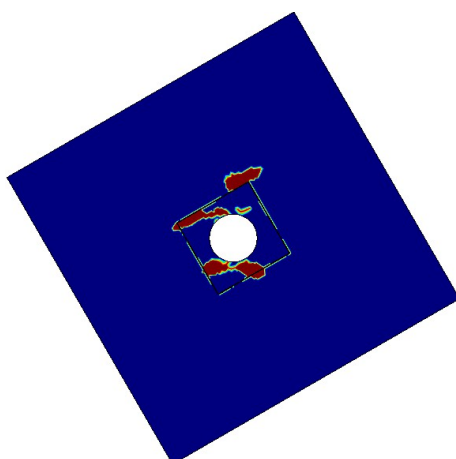
FIGURA 85 – RESULTADO DAS ÁREAS DE RUPTURA DOS PASSOS DE CARGAS (1 E 2) PARA O MODELO COM 2 SUB-REGIÕES E RESISTÊNCIA À TRAÇÃO NAS INTERFACES DE 1,5MPa.



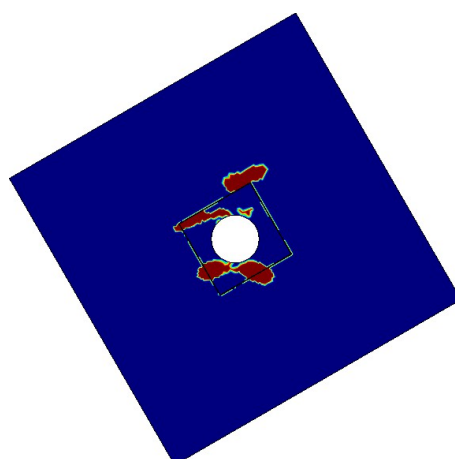
(a) 3º Passo de Carga.



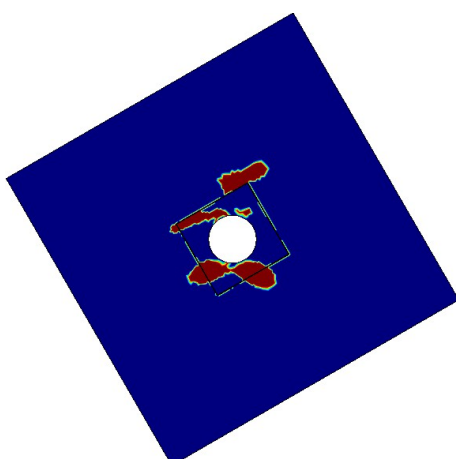
(b) 4º Passo de Carga.



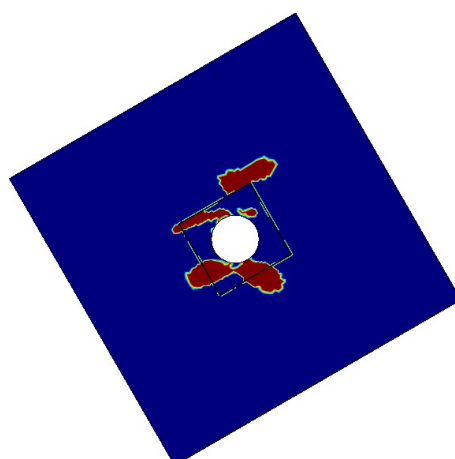
(c) 5º Passo de Carga.



(d) 6º Passo de Carga.



(e) 7º Passo de Carga.



(f) 8º Passo de Carga.

FIGURA 86 – RESULTADO DAS ÁREAS DE RUPTURA DOS PASSOS DE CARGAS (3 A 8) PARA O MODELO COM 2 SUB-REGIÕES E RESISTÊNCIA À TRAÇÃO NAS INTERFACES DE 1,5MPa.

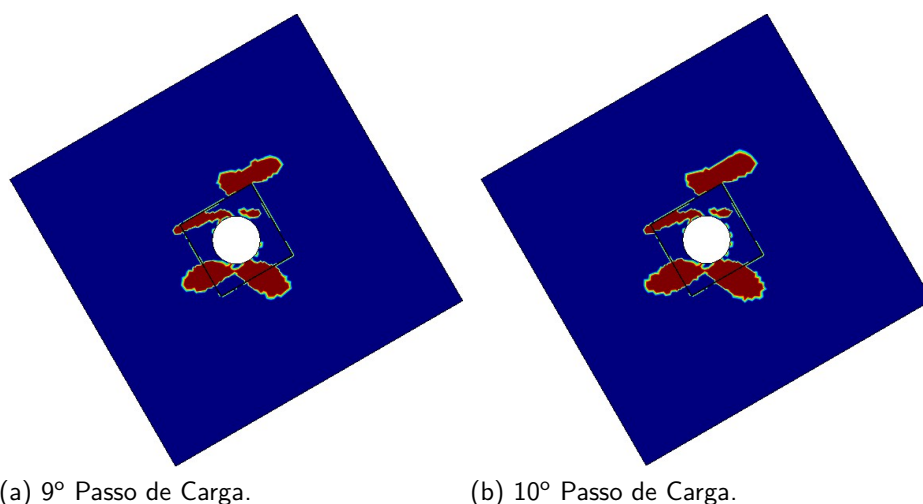


FIGURA 87 – RESULTADO DAS ÁREAS DE RUPTURA DOS PASSOS DE CARGAS (9 E 10) PARA O MODELO COM 2 SUB-REGIÕES E RESISTÊNCIA À TRAÇÃO NAS INTERFACES DE 1,5MPa.

Analisando os resultados obtidos dos modelos com resistência à tração de 0 e 1,5MPa nas interfaces, é possível perceber que, quando impõe-se a condição nula de resistência à tração nas interfaces, desde o primeiro passo de carga há ruptura próxima à interface A. Entretanto, para resistência de 1,5MPa, a ruptura na interface A acontece a partir do quinto passo de carga.

Os gráficos da figura 88, confirmam que a presença da descontinuidade aumenta a área de ruptura final. Entretanto, quando a interface permanece completamente aderida, a área final tanto para 1 quanto para 10 passos de carga não se altera conforme pode ser visto na figura 88a. A figura 88b ilustra a dependência da área de ruptura final com o histórico de carregamento.

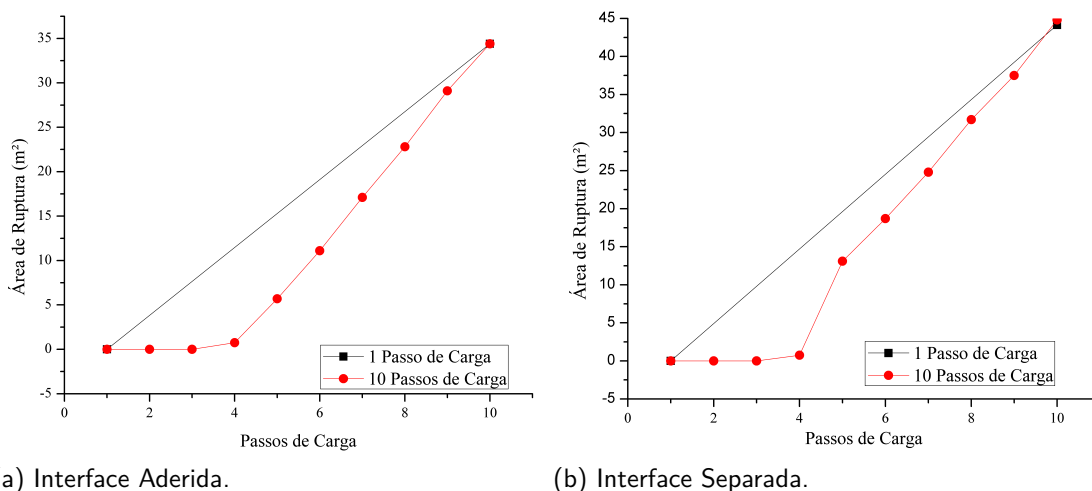


FIGURA 88 – GRÁFICO DOS PASSOS DE CARGA x ÁREA DE RUPTURA.

O gráfico da figura 89 apresenta a variação da área de ruptura versus os passos de carga considerando uma variação de resistência na interface de 0 a 3,5MPa. Quando impõe-se uma resistência de interface equivalente a 1,5MPa, percebe-se um salto no traçado do gráfico que vai do quarto para o quinto passo de carga indicando um aumento na área de ruptura. Este fato também acontece nos demais modelos cujas resistências de interface são superiores à 1,5MPa.

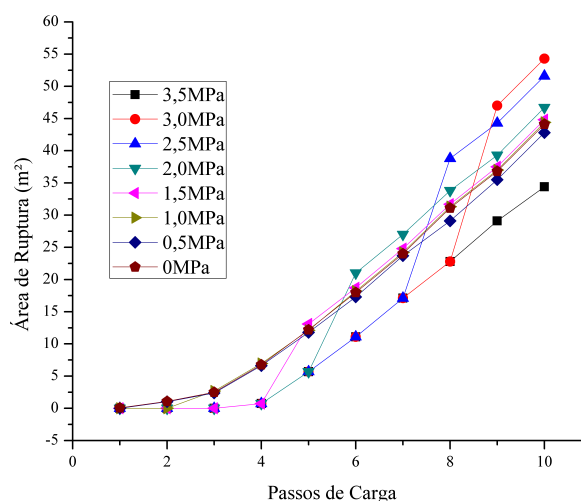
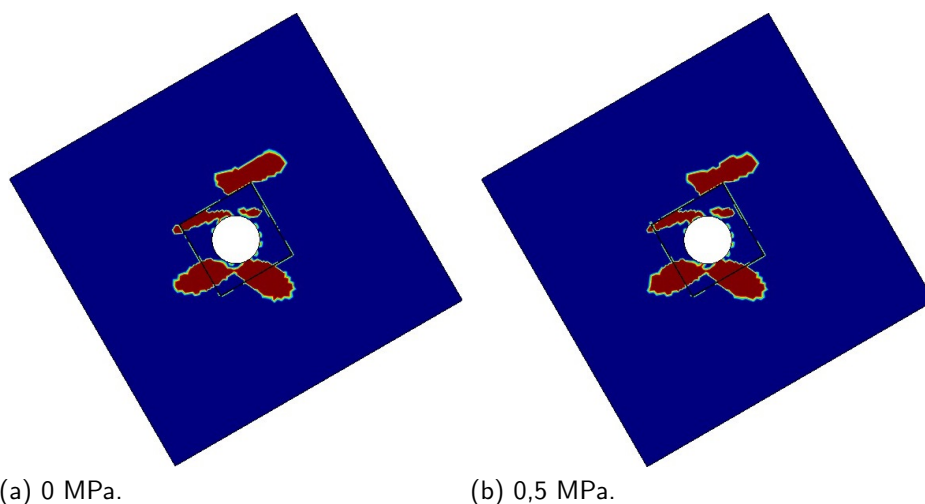


FIGURA 89 – GRÁFICO DOS PASSOS DE CARGA × ÁREA DE RUPTURA COM RESISTÊNCIA À TRAÇÃO NAS INTERFACES VARIANDO DE 0 A 3,5MPa.

Nas figuras 90 e 91 estão presentes as regiões de ruptura resultantes para os casos onde foram impostas resistências à tração nas interfaces de 0 a 3,5MPa. Ao avaliar os resultados, é possível concluir que, à medida que a resistência à tração se aproxima de 3,5MPa, a área de ruptura tende ao resultado obtido para o caso de interface aderida (ver figura 81).



(a) 0 MPa.

(b) 0,5 MPa.

FIGURA 90 – RESULTADO DAS ÁREAS DE RUPTURA CONSIDERANDO UMA VARIAÇÃO DE RESISTÊNCIA NAS INTERFACES DE 0 E 0,5MPa .

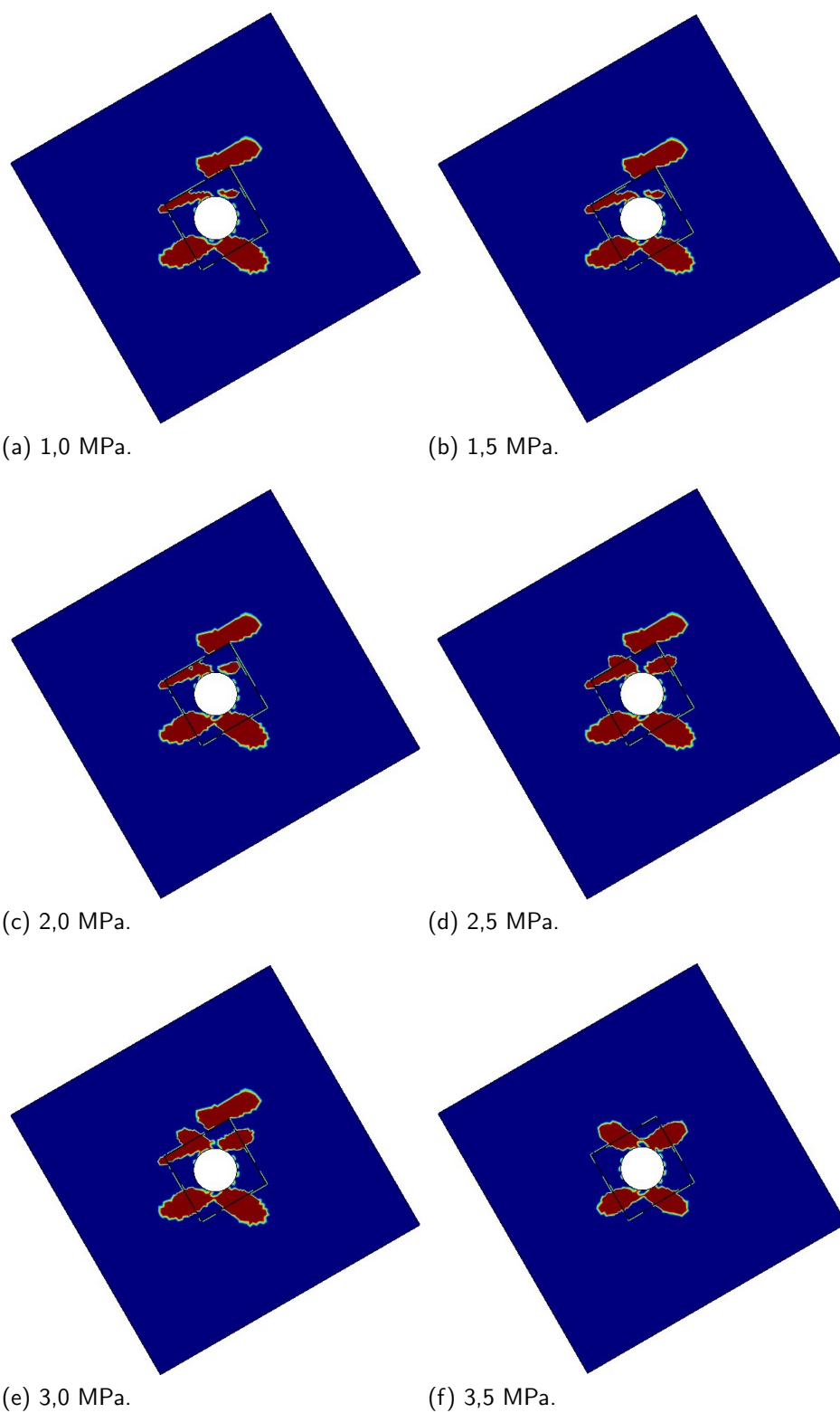


FIGURA 91 – RESULTADO DAS ÁREAS DE RUPTURA CONSIDERANDO UMA VARIAÇÃO DE RESISTÊNCIA NAS INTERFACES DE 1 A 3,5MPa .

No modelo com 29 sub-regiões a imagem de área de ruptura para a condição de resistência na interface citada acima é apresentada na figura 92.

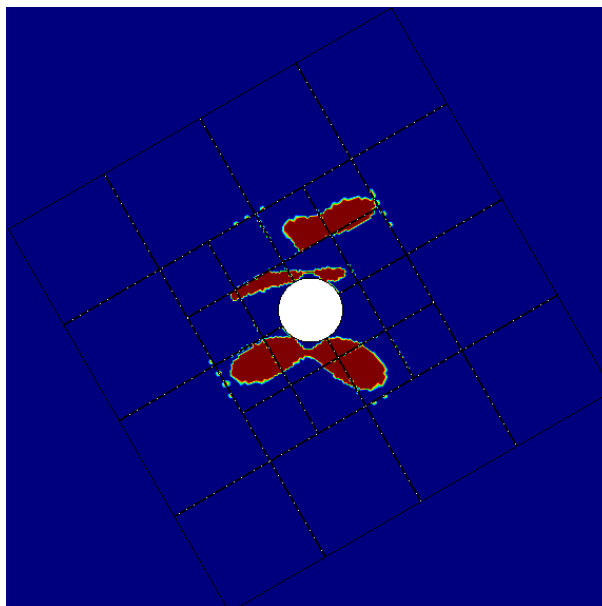


FIGURA 92 – RESULTADO DA ÁREA DE RUPTURA DO MACIÇO COM ABERTURA.

Para ilustrar a abertura das interfaces com o critério de resistência à tração nula, tem-se abaixo, na figura 93, os gráficos de deslocamento horizontal e vertical dos elementos de contorno em cada lado da descontinuidade .

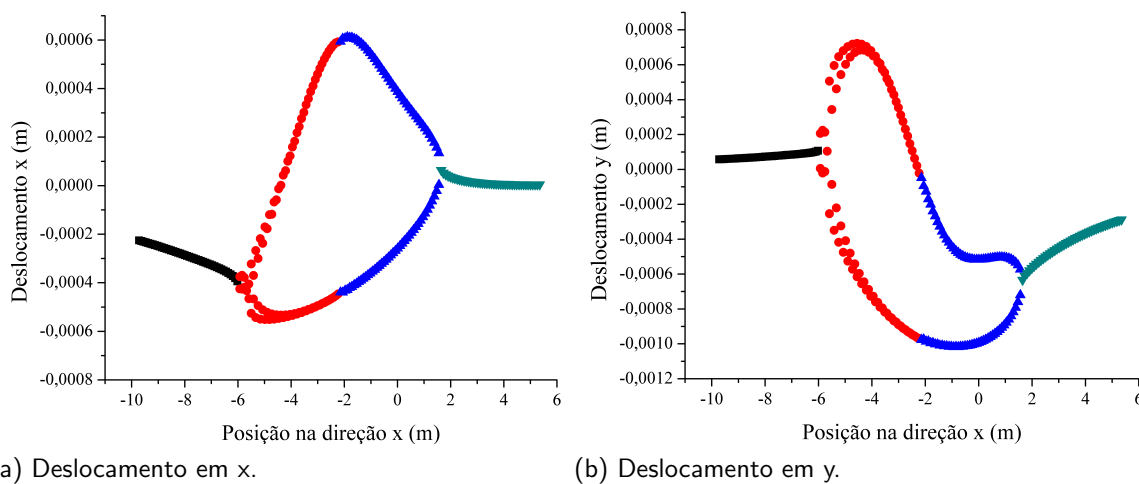


FIGURA 93 – GRÁFICO ILUSTRATIVO DA ABERTURA DA LINHA ACIMA DA CAVIDADE.

Ao impor a condição de que só pode haver abertura se houver ruptura pelo critério de Hoek-Brown, o resultado de área de ruptura é o mesmo da figura 92.

7.6 MODELO PROBABILÍSTICO COM PASSOS DE CARGA E DESCONTINUIDADES

O modelo probabilístico foi limitado em função da disponibilidade de recursos computacionais para as análises. Portanto, adotou-se o modelo com 2 sub-regiões, 256 elementos de

contorno constantes e 6386 pontos de domínio. Apresenta-se o resultado de uma simulação Monte Carlo com 1000 análises, considerando 10 passos de carga. Os parâmetros de entrada fixos estão presentes na tabela 29.

TABELA 29 – PARÂMETROS DE ENTRADA FIXOS NO MODELO.

E_1 (MPa)	σ_h (MPa)	ν	mi	GSI	σ_c (MPa)	NEC	NPI
60000	0,0	0,20	29	75	240	256	6386

Já os parâmetros escolhidos para a análise de Monte Carlo, considerando uma distribuição uniforme, são apresentados na tabela 30.

TABELA 30 – PARÂMETROS DE ENTRADA VARIÁVEIS NO MODELO.

Variável	Mínimo	Máximo	TD
E_2 (MPa)	30000	50000	1
σ_v (MPa)	4	12	1
TD (tipo de distribuição): 1 uniforme			

O modelo adotado para a análise foi o mesmo da seção 7.3 (ver figura 94), com duas sub-regiões, porém com uma discretização inferior (ver figura 95). Para a interface A, indicada na figura 94, impôs-se a condição de abertura com resistência à tração no valor de 1,50MPa.

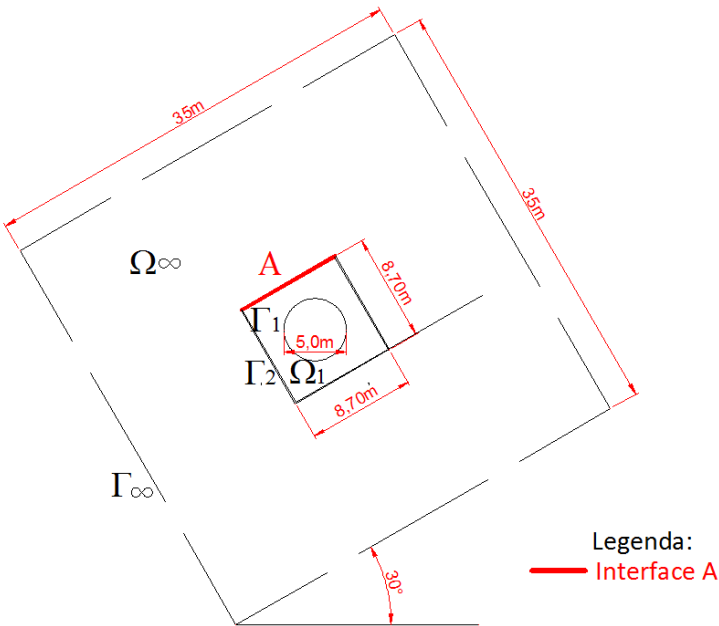


FIGURA 94 – MODELO UTILIZADO NA ANÁLISE PROBABILÍSTICA.

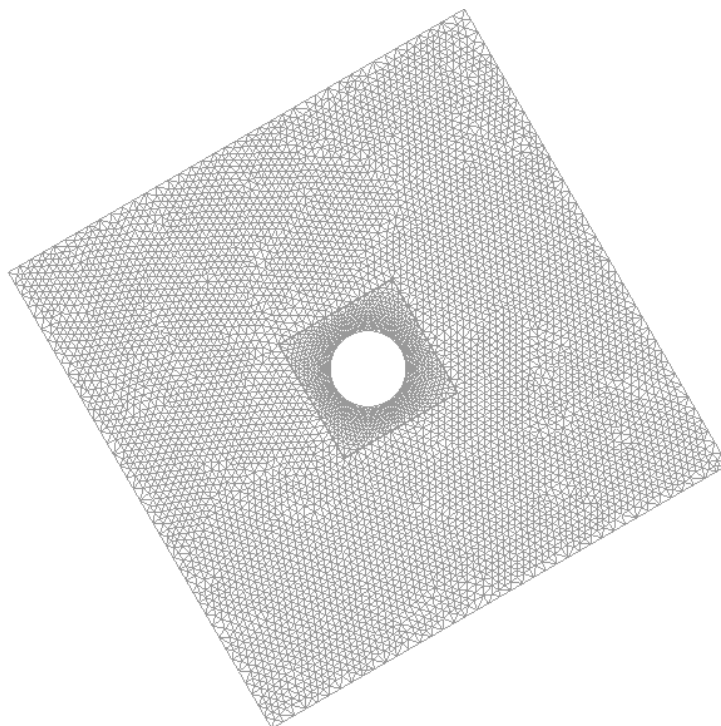


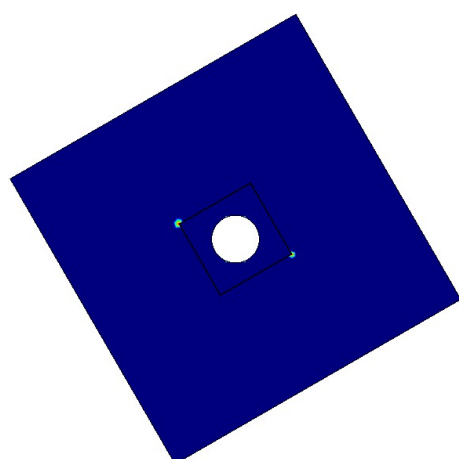
FIGURA 95 – MALHA DE ELEMENTOS ADOTADA PARA O CASO PROBABILÍSTICO.

A tabela 31 apresenta os parâmetros resultantes, dentre as 1000 análises de Monte Carlo, para o caso mais crítico (maior área de ruptura) e o caso menos crítico (menor área de ruptura).

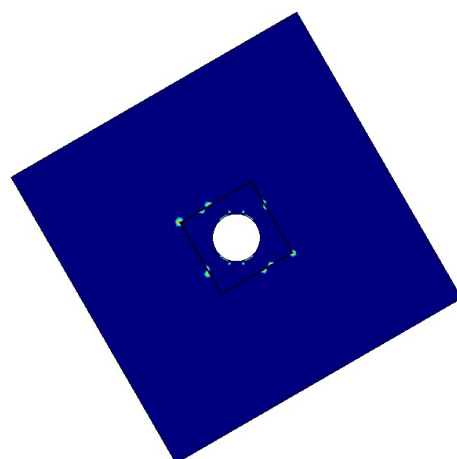
TABELA 31 – PARÂMETROS RESULTANTES PARA OS CASOS MAIS CRÍTICO E MENOS CRÍTICO.

Caso	Loop	E_{22} (MPa)	σ_v (MPa)	AR(m ²)
+ Crítico	577	30011,12	11,99	70,76
- Crítico	51	49949,23	4,02	1,81

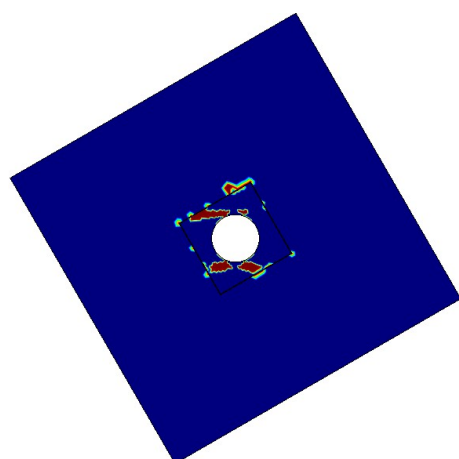
Utilizando os parâmetros resultantes da tabela 31, fez-se uma análise individual para o caso mais crítico cujo objetivo era obter as imagens para os 10 passos de carga conforme ilustram as figuras 96 e 97.



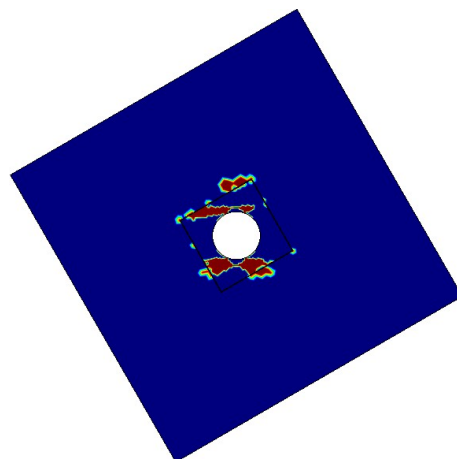
(a) 1º Passo de Carga.



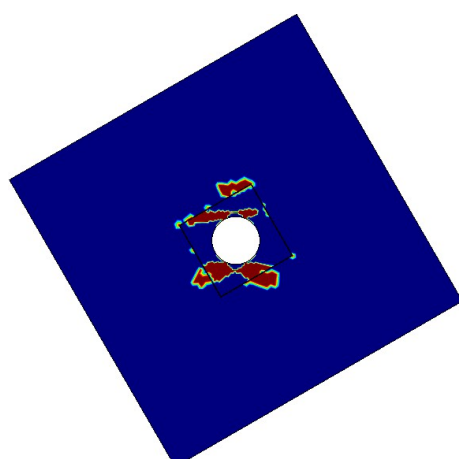
(b) 2º Passo de Carga.



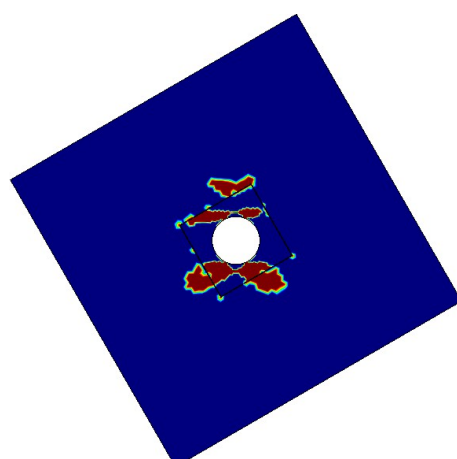
(c) 3º Passo de Carga.



(d) 4º Passo de Carga.

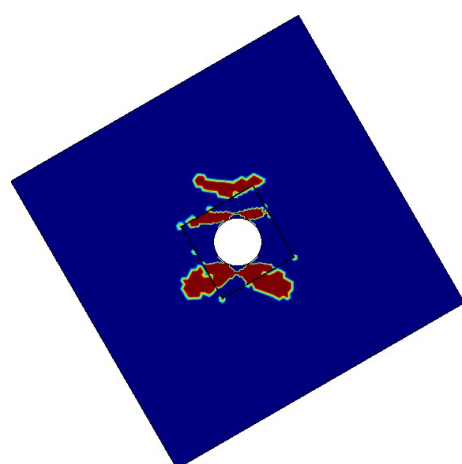


(e) 5º Passo de Carga.

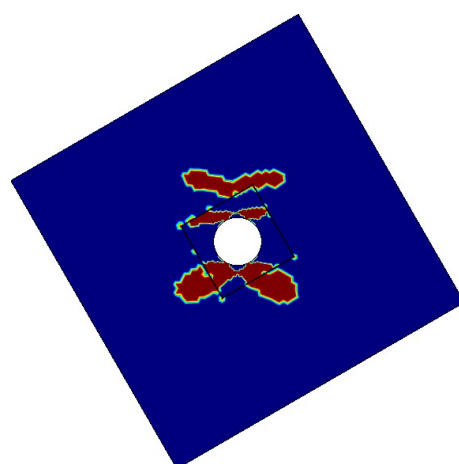


(f) 6º Passo de Carga.

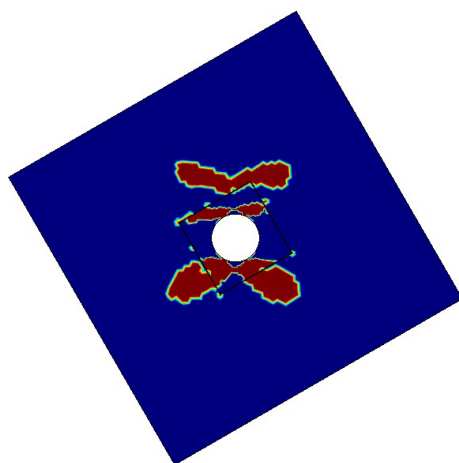
FIGURA 96 – RESULTADO DAS ÁREAS DE RUPTURA DOS PASSOS DE CARGAS (1 A 6) PARA O CASO MAIS CRÍTICO.



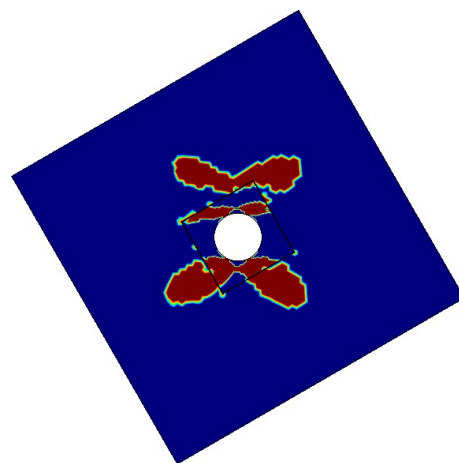
(a) 7º Passo de Carga.



(b) 8º Passo de Carga.



(c) 9º Passo de Carga.



(d) 10º Passo de Carga.

FIGURA 97 – RESULTADO DAS ÁREAS DE RUPTURA DOS PASSOS DE CARGAS (7 A 10) PARA O CASO MAIS CRÍTICO.

Para o caso menos crítico, como a área de ruptura não evoluiu muito, devido à baixa tensão e ao alto valor para E_2 , optou-se por apresentar apenas o décimo passo de carga conforme a figura 98. Neste caso específico não ocorre a abertura da descontinuidade.

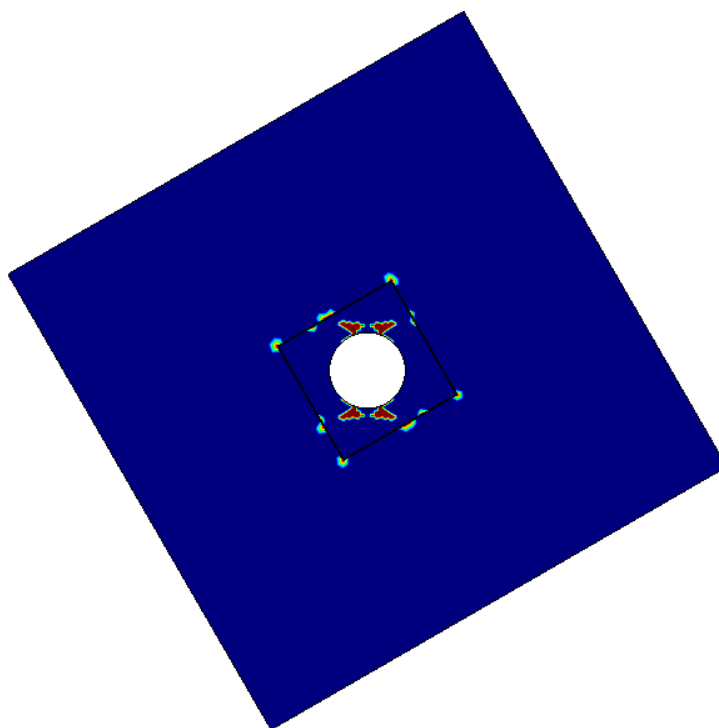


FIGURA 98 – RESULTADO DA ÁREA DE RUPTURA PARA O CASO MENOS CRÍTICO.

Por fim, é apresentado o histograma (figura 99) para verificar a probabilidade de ruptura ocorrida dentre as 1000 análises de acordo com a área de ruptura normalizada resultante. Por meio do gráfico da figura 99, verificou-se que a grande maioria das análises resultou numa área de ruptura normalizada superior a 50 % da área da cavidade.

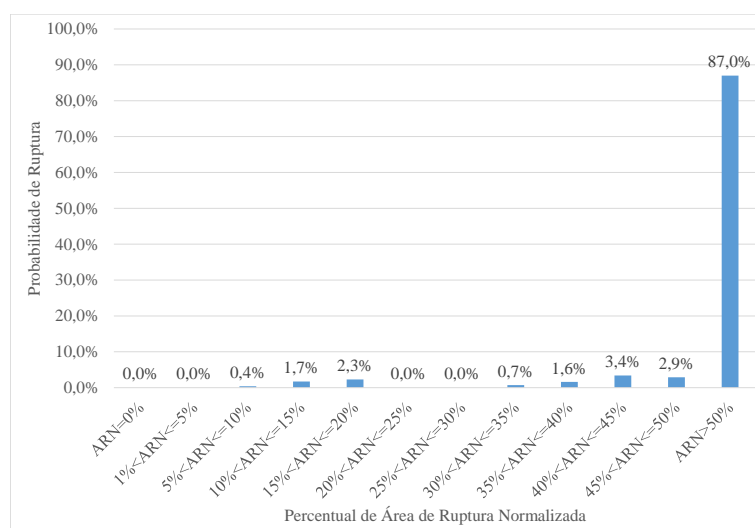


FIGURA 99 – PROBABILIDADE DE ÁREA DE RUPTURA NORMALIZADA.

8 CONCLUSÕES

A conclusão do trabalho fundamentou-se em uma construção metodológica iniciada com o estudo dos autores clássicos do Método dos Elementos de Contorno em meios isotrópicos que, valendo-se da linguagem de programação Fortran, culminou no desenvolvimento do algoritmo para modelagem numérica de túneis escavados em rocha.

Para a análise do critério de ruptura adotou-se o critério de Hoek-Brown. Na sequência, tendo em vista a heterogeneidade do problema em questão, tornou-se necessária a implementação da anisotropia do material.

No que tange a concepção do modelo numérico fez-se necessário a inclusão de uma análise probabilística utilizando o Método de Monte Carlo tanto para o caso isotrópico quanto para o anisotrópico. Já para a implementação das descontinuidades em um mesmo modelo anisotrópico e probabilístico, utilizou-se da inserção de sub-regiões em conjunto com a aplicação da mecânica do contato e passos de carga.

As formulações implementadas do MEC para meios elásticos isotrópicos e anisotrópicos foram validados por meio de problemas simples com respostas conhecidas. Sobre as formulações foram acrescentados o método da análise de Monte Carlo, incluindo uma distribuição estatística para alguns parâmetros de entrada, entre os quais, o campo de tensões iniciais. Outro aspecto inserido nas formulações foi a variação linear do fator de dano com a profundidade. Diferentes situações de análise foram avaliadas, onde foi possível concluir sobre a coerência da implementação do fator de dano próximo à cavidade. A inclusão deste fator pode trazer maior segurança às avaliações.

O programa desenvolvido permitiu avaliar o impacto da incerteza na definição dos campos de tensões iniciais sobre a extensão das regiões de instabilidade próxima à cavidade.

Comparando os casos isotrópicos com os anisotrópicos, foi possível perceber que em algumas situações a região de ruptura resultante no meio anisotrópico foi maior que no isotrópico. Com isto, conclui-se que a modelagem isotrópica nem sempre é a mais conservadora. Ao avaliar as áreas dos campos de ruptura, para os casos em que os parâmetros do material foram considerados constantes, percebeu-se que o modelo anisotrópico foi mais conservador que o isotrópico.

Constatou-se a importância de avaliar os resultados do contorno quando são feitas análises de Monte Carlo, pois uma instabilidade no sistema pode surgir ao se considerar uma distribuição normal para os parâmetros da rocha, que pode conduzir a um problema quase-isotrópico que não é bem posto ao ser avaliado com a formulação anisotrópica apresentada.

Outro aspecto associado à modelagem de Monte Carlo é a definição do número de

eventos no espaço amostral, população de amostras. O tempo de processamento computacional é diretamente proporcional à magnitude desse conjunto, sendo interessante buscar o tamanho mínimo necessário que forneça resultados coerentes do ponto de vista probabilístico. No estudo apresentado definiu-se uma linha de corte equivalente a dois desvios padrão para os parâmetros de entrada da rocha e os resultados mais críticos, tanto para 1000 quanto para 10000 simulações foram bem próximos. Ou seja, não houve necessidade de se considerar um número de análises tão grande para que o estudo probabilístico fosse validado. Contudo, cada situação traz particularidades que podem exigir uma maior ou menor quantidade de simulações.

A modelagem de um problema anisotrópico com múltiplas sub-regiões apresentou ótimos resultados ao se considerar interfaces sem a possibilidade de abertura.

Ao se considerar a possibilidade de abertura de descontinuidades validou-se o código implementado por meio de um modelo simplificado de mecânica da fratura. Os resultados obtidos foram satisfatórios, apesar da ordem de interpolação reduzida dos elementos de contorno utilizados.

Em um problema de cavidade em meio infinito com descontinuidades, constatou-se a dependência da área de ruptura com o histórico de carregamento e a condição de resistência da interface. Além disso, não há diferença entre condição de tração simples e Hoek-Brown no campo de deformações.

Em se tratando do modelo probabilístico, destaca-se o custo computacional, pois foi necessário limitar a discretização do modelo. Apesar disso, verificou-se que os resultados obtidos mostraram-se coerentes com a análises prévias.

Por fim, os resultados obtidos demonstram o potencial da abordagem implementada para a execução de análises probabilísticas, que pode ser facilmente adaptada e/ou melhorada com o uso de modelos mais representativos para o maciço rochoso.

8.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Além de aprimoramentos que poderiam gerar resultados mais precisos, como o uso de elementos de ordem superior, e que permitiriam análises de problemas de maior porte com a otimização do código implementado apresentam-se as seguintes sugestões para continuidade deste trabalho:

Implementação de um modelo que contemple a mudança das propriedades mecânicas do meio com a propagação da área de ruptura. O modelo atual "transfere"linearmente todas as condições de contorno e tensões iniciais ao domínio independentemente da degradação do mesmo.

Inclusão de condições não lineares associadas ao comportamento das descontinuidades. Este aspecto vai além da condição apresentada de deslizamento com atrito. Trataria, por

exemplo, o comportamento viscoelástico ou elastoplástico de materiais presentes nas interfaces.

A modelagem tridimensional, embora pareça uma sugestão trivial, inerente à extensão a muitos estudos bidimensionais, é interessante no presente contexto dado que o estado de plano de deformações é um caso particular do que se encontra na prática.

Otimizar a eficiência do código para solução de problemas de grande porte que são inerentes aos problemas de mecânica das rochas de escavações em meios com múltiplas famílias de descontinuidades.

Acoplamento da formulação do MEC com o método dos elementos discretos que pode apresentar um melhor desempenho em problemas que apresentam grandes deslocamentos associados a instabilidades próximas à cavidade.

REFERÊNCIAS

- ALIABADI, M. H. *The Boundary Element Method: Applications in Solids and Structure*. England: John Wiley & Sons, 2002. v. 2. Citado 7 vezes nas páginas 30, 39, 41, 46, 57, 60 e 107.
- ANDERSON, T. L. *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*. New York: CRC Press, 1995. Citado na página 124.
- BECKER, A. A. *The Boundary Element Method in Engineering*. United Kingdom: Mc Graw-Hill, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 106.
- BEER, G. Application of the boundary element method to the simulation in tunneling. *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, São Carlos, v. 12, p. 1–12, 2010. Citado na página 32.
- BEER, G.; POULSEN, B. A. Efficient numerical modelling of faulted rock using the boundary element method. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Pergamon, v. 31, p. 485–506, 1994. Citado na página 35.
- BEER, G.; WATSON, J. O. *Introduction to Finite Boundary Element Method for Engineers*. New York: John and Wiley, 1992. Citado na página 32.
- BOX, G. E. P.; MULLER, E. M. A note on the generation of random normal deviates. In: *The Annals of Mathematical Statistics*. [S.l.: s.n.], 1958. p. 610–611. Citado na página 71.
- BREBBIA, C. A. *Topics in Boundary Element Research*. Berlin: Springer, 1987. Citado na página 32.
- BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. *Boundary Elements An Introductory Course*. Southampton: Mc Graw-Hill, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 110.
- BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C.; WROBEL, L. C. *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*. Berlin: Springer-Verlag, 1984. Citado na página 26.
- BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. *Boundary Element Techniques*. Berlin: Springer-Verlag, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 46.
- CARTER, J. P.; XIAO, B. A 2d coupled finite element and boundary element scheme to simulate the elastic behavior of jointed rocks. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, John Wiley & Sons, v. 18, p. 49–71, 1994. Citado na página 35.
- CERROLAZA, M.; GARCIA, R. Boundary elements and damage mechanics to analyse excavations in rock mass. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 20, p. 1–16, 1997. Citado na página 32.
- CHEN, C. S.; PAN, E.; AMADEI, B. Fracture mechanics analysis of cracked discs of anisotropic rock using the boundary element method. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Pergamon, v. 35, p. 195–218, 1998. Citado na página 31.

- CHEN, Y. C.; HWU, C. Boundary element method for vibration analysis of two-dimensional anisotropic elastic solids containing holes, cracks or interfaces. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 40, p. 22–35, 2013. Citado na página 31.
- CHOU, P. C.; PAGANO, N. J. *Elasticity Tensor, Dyadic, and Engineering Approaches*. New York: Dover, 1967. Citado na página 37.
- CROTTY, J. M.; WARDLE, L. J. Boundary integral analysis of piecewise homogeneous media with structural discontinuities. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Pergamon, v. 22, p. 419–427, 1985. Citado na página 34.
- CROUCH, E.; STARFIELD, A. M. *Boundary Element Methods in Solid Mechanics*. London: George Allen & Unwin, 1983. Citado na página 31.
- CRUSE, T. A. Numerical solutions in three dimensional elastostatics. *International Journal of Solids and Structures*, Pergamon, v. 11, 1975. Citado na página 30.
- CRUSE, T. A.; SWEDLOW, J. L. *Interactive Program for Analysis and Design Problems Advanced Composites Technology*. Pittsburgh, Pennsylvania, 1971. Citado 5 vezes nas páginas 10, 36, 60, 61 e 62.
- DEB, A.; BANERJEE, P. K. BEM for general anisotropic 2D elasticity using particular integrals. *Communications in Applied Numerical Methods*, John Wiley & Sons, v. 6, p. 111–119, 1990. Citado na página 30.
- DUENSER, C.; BEER, G. Simulation of sequential excavation with boundary element method. *Computers and Geotechnics*, Elsevier, v. 44, p. 157–166, 2012. Citado na página 32.
- EBERHARDT, E. The Hoek-Brown Failure Criterion. In: *Rock Mechanics and Rock Engineering*. [S.l.]: Springer, 2012. v. 45, p. 981–988. Citado 5 vezes nas páginas 10, 36, 50, 51 e 52.
- FATTAH, M. Y.; SHLASH, K. T.; AL-SOUD, M. S. M. Boundary element analysis of a lined tunnel problem. *International Journal of Engineering*, v. 25, p. 87–94, 2012. Citado na página 35.
- GHIASIAN, M.; AHMADI, M. T. Efficient 3d boundary element dynamic analysis of discontinuities. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 50, p. 320–328, 2015. Citado na página 35.
- GOODMAN, R. E. *Introduction to Rock Mechanics*. Canada: John Wiley & Sons, 1989. Citado na página 49.
- HAMMAH, R. E.; YACOUB, T.; CORKUM, B. The practical modelling of discontinuous rock masses with finite element analysis. In: *42nd US Rock Mechanics Symposium and 2nd U.S. Canada Rock Mechanics Symposium*. [S.l.]: American Rock Mechanics Association, 2008. Citado na página 35.
- HARRISON, J. P.; HUDSON, J. A. *Engineering Rock Mechanics: Part 2: Illustrative Worked Examples*. London: Pergamon, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 27.
- HOEK, E. Technical note: Reliability of Hoek-Brown estimates of rock mass properties and their impact on design. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Pergamon, v. 35, p. 63–68, 1998. Citado na página 33.

HOEK, E.; BROWN, E. T. *Underground Excavations in Rock*. London: Institute of Mining and Metallurgy, 1982. Citado na página 32.

HOEK, E.; KAISER, P. K.; BAWDEN, W. F. *Support of Underground Excavations in Hard Rock*. [S.l.]: Taylor & Francis Group, 1995. Citado 3 vezes nas páginas 10, 52 e 53.

HORGAN, C. O.; BAXTER, S. C. Effects of curvilinear anisotropy on radially symmetric stress in anisotropic linearly elastic solids. *Journal of Elasticity*, Kluwer Academic, 1996. Citado na página 64.

JAREK, A.; ASSIS, A. P. de; LACERDA, L. A. de. Aplicação do método dos elementos de contorno na estabilidade de túneis - abordagem probabilística da influência das tensões iniciais e dos parâmetros de resistência do maciço rochoso. In: *VII Simpósio Brasileiro de Mecânica das Rochas*. [S.l.: s.n.], 2014. Citado na página 31.

JING, L. A review of techniques, advances and outstanding issues in numerical modelling for rock mechanics and rock engineering. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Pergamon, v. 40, p. 283–353, Janeiro 2003. Citado na página 25.

JING, L.; STEPHANSSON, O. *Fundamentals of Discrete Element Methods for Rock Engineering: Theory and Applications*. [S.l.]: Elsevier, 2007. Citado na página 26.

KANE, J. H. *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*. New Jersey: Prentice Hall, 1994. Citado na página 41.

KE, C. C. et al. Two-dimensional fracture mechanics analysis using a singledomain boundary element method. *Mathematical Problems in Engineering*, Hindawi, 2012. Citado na página 31.

KUHN, G.; MÖHRMANN, W. Boundary element method in elastostatics: theory and applications. *Applied Mathematical Modelling*, Butterworth & Co., 1983. Citado na página 30.

LACERDA, L. A. de; WROBEL, L. C. Frictional contact analysis of coated axisymmetric bodies using the boundary element method. *Journal of Strain Analysis*, v. 35, p. 423–440, February 2000. Citado na página 107.

LANGFORD, J. C.; DIEDERICHS, M. S. Quantifying uncertainty in Hoek-Brown intact strength envelopes. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Elsevier, v. 74, p. 91–102, 2015. Citado na página 34.

LEKHNITSKII, S. G. *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*. Moscow: Mir, 1981. Citado 4 vezes nas páginas 32, 58, 59 e 66.

LEMOES, J. V. *A hybrid distinct element computational model for the half-plane*. Dissertação (Mestrado) — University of Minnesota, 1987. Citado na página 26.

LEVEQUE, R. J. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems*. [S.l.]: SIAM, 2007. Citado na página 26.

LI, A. J. et al. Parametric Monte Carlo studies of rock slopes based on the Hoek-Brown failure criterion. *Computers and Geotechnics*, Elsevier, v. 45, p. 11–18, 2012. Citado na página 34.

LIU, Q. G.; SARLER, B. Non-singular method of fundamental solutions for anisotropic elasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 45, p. 68–78, 2014. Citado na página 31.

LÜ, Q.; LOW, B. K. Probabilistic analysis of underground rock excavations using response surface method and sorm. *Computers and Geotechnics*, Elsevier, v. 38, p. 1008–1021, 2011. Citado na página 33.

MANSUR, W. J. et al. A rock mass back analysis technique. In: *1 Brazilian Seminar on the Boundary Element Method in Engineering*. [S.l.: s.n.], 1996. Citado na página 32.

MAO, N.; AL-BITTAR, T.; SOUBRA, A.-H. Probabilistic analysis and design of strip foundations resting on rocks obeying Hoek-Brown failure criterion. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Elsevier, v. 49, p. 45–58, 2012. Citado na página 33.

MCCLURE, R. N. H. M. *Discrete Fracture Network Modeling of Hydraulic Stimulation: Coupling Flow and Geomechanics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado na página 26.

NISHIMURA, N.; KOBAYASHI, S. A boundary integral equation formulation for three dimensional anisotropic elastostatics. In: *5 th International Conference Boundary Element*. [S.l.]: Springer, 1983. p. 345–354. Citado na página 30.

PAIVA, S. V. F. de. *Análise de Trincas Interfaciais em Bimateriais Anisotrópicos Usando o Método dos Elementos de Contorno*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, 2006. Citado na página 63.

PAN, X. D.; REED, M. B. A coupled distinct element-finite element method for large deformation analysis of rock masses. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Pergamon, v. 28, p. 93–99, 1991. Citado na página 26.

PANDE, G. N.; BEER, G.; WILLIAMS, J. R. *Numerical Methods in Rock Mechanics*. New York: Wiley, 1990. Citado na página 32.

PRIEST, S. D. *Descontinuity Analysis for Rock Engineering*. Australia: Springer, 1995. Citado na página 105.

QUIM, F. *Análise de Escavações de Túneis com Revestimento utilizando o Método dos Elementos de Contorno*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, São Paulo, 2010. Citado na página 32.

RAFIEZADEH, K.; ATAIE-ASHTIANI, B. Seepage analysis in multi-domain general anisotropic media by three-dimensional boundary elements. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 37, p. 527–541, 2013. Citado na página 31.

RITZ, E.; MUTLU, O.; POLLARD, D. D. Integrating complementarity into the 2d displacement discontinuity boundary element method to model faults and fractures with frictional contact properties. *Computers & Geosciences*, Elsevier, v. 45, p. 304–312, 2011. Citado na página 35.

RIZZO, F. J. Integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Quarterly of Applied Mathematics*, Butterworth & Co., v. 25, p. 83–95, 1967. Citado na página 30.

RIZZO, F. J.; SHIPPY, D. J. A method for stress determination in plane anisotropic elastic bodies. *Journal of Composites Materials*, v. 4, p. 36–61, January 1970. Citado na página 30.

ROCHA, F. dos S. *Análise de Descontinuidades pelo Método dos Elementos de Contorno*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, São Paulo, 1988. Citado na página 34.

ROCSCIENCE, I. *Examine2D Version 8.003 2D Stress Analysis for Underground Excavations*. 2008. Disponível em: www.rocscience.com. Citado na página 55.

ROCSCIENCE, I. *RocLab Version 1.033 Rock Mass Strength Analysis using the Generalized Hoek-Brown failure criterion*. 2013. Disponível em: www.rocscience.com. Citado na página 78.

RODRÍGUEZ-TEMBLEQUE, L. et al. 3D frictional contact of anisotropic solids using BEM. *European Journal of Mechanics A/Solids*, Elsevier, v. 30, p. 95–104, 2010. Citado na página 30.

TELLES, J. C. F.; CASTOR, G. S.; GUIMARÃES, S. A numerical Green's function approach for boundary elements applied to fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, John Wiley & Sons, 1995. Citado na página 48.

TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. N. *Teoría de La Elasticidad*. España: Urmo, 1968. Citado na página 57.

TU, C. et al. Two-dimensional stress intensity factor analysis of cracks in anisotropic bimaterial. *Mathematical Problems in Engineering*, Hindawi, 2013. Citado na página 31.

USECHE, J.; ALBUQUERQUE, E. L.; SOLERO, P. Harmonic analysis of shear deformable orthotropic cracked plates using the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 36, p. 1528–1535, 2012. Citado na página 31.

VANALLI, L. *O MEC e o MEF Aplicados à Análise de Problemas Viscoplasticos em Meios Anisotrópicos e Compostos*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, São Paulo, 2004. Citado na página 30.

VENTURINI, W. S. *Boundary Element Method in Geomechanics. Lecture Notes in Engineering*. [S.l.]: Springer, 1983. Citado na página 32.

VOGEL, S. M.; RIZZO, F. J. An integral equation formulation of three dimensional anisotropic elastostatic boundary value problems. *Journal of Elasticity*, Noordhoff International Publishing - Leyden, v. 3, p. 203–216, September 1973. Citado na página 30.

WÜNSCHE, M.; SÁNCHEZ, F. G.; SÁEZ, A. Analysis of anisotropic Kirchhoff plates using a novel hypersingular BEM. *Computational Mechanics*, Elsevier, v. 49, p. 629–641, 2012. Citado na página 30.

XIAO, B.; CARTER, J. P. Boundary element analysis of anisotropic rock masses. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 11, p. 293–303, March 1993. Citado 4 vezes nas páginas 15, 32, 66 e 67.

ZIENKIEWICZ, O. C.; KELLY, D. W.; BETTESS, P. The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, John Wiley & Sons, v. 11, p. 355–375, 1977. Citado na página 26.

ZIENKIEWICZ, O. C. *The finite element method in engineering sciences*. New York: McGraw-Hill, 1977. Citado na página 26.

ZIO, E. *The Monte Carlo Simulation Method for System Reliability and Risk Analysis*. London: Springer, 2013. Citado na página 69.